

Résistance des Matériaux (RdM)

Niveau CI1

Intervenant:

Agnès ZAMBON

AU: 2022-2023

Plan de la séance 1

1. INTRODUCTION AU DIMENSIONNEMENT DE PIÈCES ET DE STRUCTURES
2. NOTION DE CONTRAINTE
3. NOTION DE DÉFORMATION
4. PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES D’UN MATÉRIAU
5. LOI DE COMPORTEMENT D’UN MATÉRIAU

1.2 A travers l'histoire (approches empiriques)

Les systèmes mécaniques sont constitués de pièces élémentaires qui peuvent être classées en **trois familles**, selon leurs **proportions géométriques & propriétés mécaniques**

I. Poutres

1 dimension >> 2 autres



Stonehenge (UK)



Araire



Trébuchet

II. Plaques et Coques

1 dimension << 2 autres



Outils en céramique



Armures



Coques de bateaux

III. Pièces volumiques

Sans dimension privilégiée



Presses d'huile



Boules de démolition



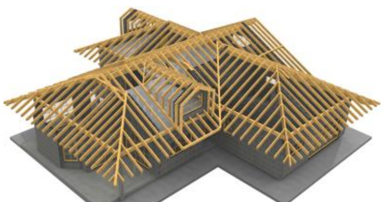
1. INTRODUCTION AU DIMENSIONNEMENT DE PIÈCES/STRUCTURES

1.2 De nos jours: Approches basées sur la MMC

L'innovation de structures en ingénierie fait appel à des **modèles de dimensionnement** de plus en plus performants permettant de **prédire** avec précision **le comportement** mécanique aux conditions de service (sollicitations, stabilité géométrique, …)

Poutres

1 dimension >> 2 autres



Bâtiment



Charpentes et Plateformes



Radiotélescope (CHIME)

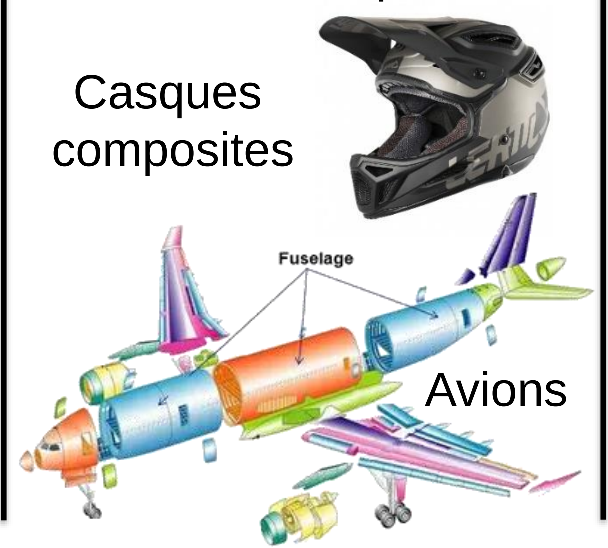
Plaques et Coques

1 dimension << 2 autres



Tôles métalliques

Casques composites



Avions

"Pièces volumiques"

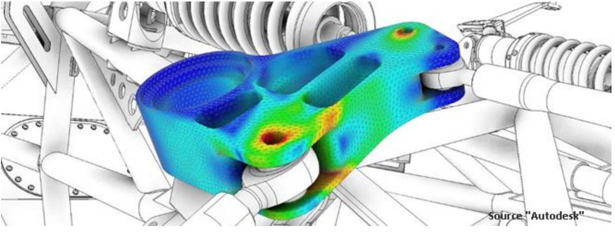
Sans dimension privilégiée



Briseurs de vagues

Têtes de forage





Pièces automobiles

1.3 Sécurité et aptitude au service

- Toute structure soumise à un chargement externe "exagéré" est sujette à des **mécanismes de déformation** ou/et des **mécanismes de défaillance,** incompatibles avec son usage .
- Pour garantir son aptitude au service et éviter les accidents, **des critères de résistance** portant sur les contraintes sont respectés dès la phase de conception.

❑ Exemple: le cas d'une sollicitation de traction uni-axiale

- Observation: Rupture ☹

F

L_0

A

F

$F > F_{max}$

$L > L_{max}$

Chargement (F)

F ↗ F_{max}

L_{max}

☹

F ↗ F_{max}

Déclenchement défaillance

❑ Critères usuels de résistance: ☺

- **Critère en contrainte maximale** (σ_{Ultime})

$$\boldsymbol{\sigma}\left(=\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}\right) < \boldsymbol{\sigma_{Ultime}}$$

- Critère en déplacement maximal (L_{max})

$$L < L_{max}$$

σ: contrainte mécanique [$MPa = \frac{N}{mm^2}$]

F: Force mécanique [$N = kg \times m/s^2$]

A: surface de la section [m^2]



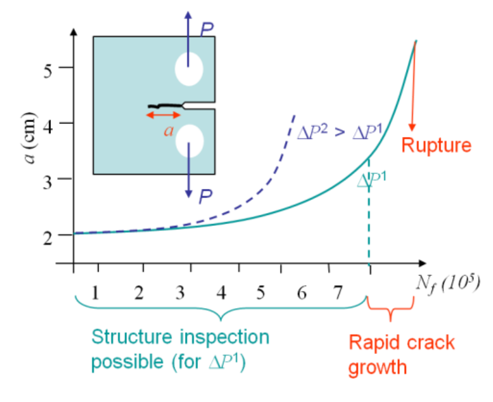
1.3 Sécurité et aptitude au service (Complément de lecture)

❑ Autres critères usuels (suite)

- D'autres phénomènes peuvent être à l'origine de mécanismes de défaillance



- **Instabilité par flambement**: certains éléments élancés chargés en compression, peuvent subir, pour une valeur critique de la charge, un changement brutal de forme (apparition d'une courbure) conduisant à sa ruine.



- **Rupture par fatigue**: des chargements répétitifs peuvent engendrer au sein du matériau un endommagement cumulatif qui conduit au bout d'un temps lié au chargement à une rupture.

- **Rupture par fissuration**: Sous conditions de sollicitation, une fissure peut se propager dans un matériau et conduire à une rupture brutale « catastrophique »;

- **Instabilité dynamique :** sous sollicitation cyclique, un phénomène de vibrations s'instaure et s'amplifie jusqu'à rupture des éléments.





Ces phénomènes demandent des études complémentaires spécifiques (hors programme)

DIMENSIONNEMENT

DE PIÈCES & DE STRUCTURES:

FAMILLE DES POUTRES

Poutres

1 dimension >> 2 autres

❑ Comment vérifier les critères usuels pour les poutres ?

Scénario: *« Soit une automobile de 1200 Kg qui se déplace sur un pont de 30 m de longueur et 20 tonnes de masse (figure 1). Le véhicule s'arrête brusquement à 10 m du point B»*

❑ Problème de RdM

Le pont risque t'il de fléchir sous l'action du poids du vehicule ?

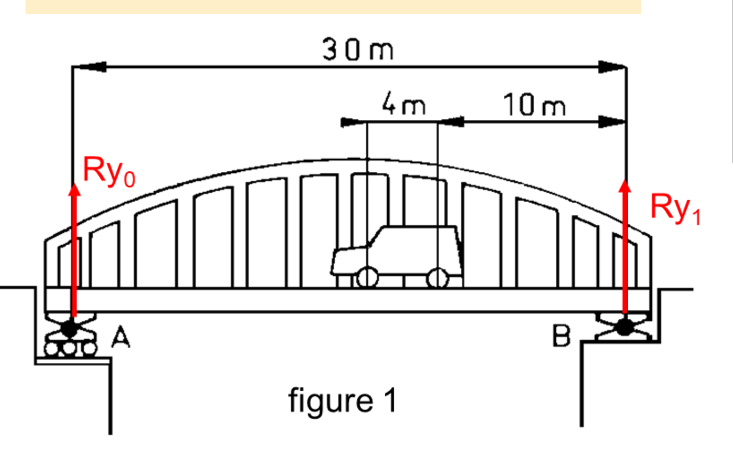
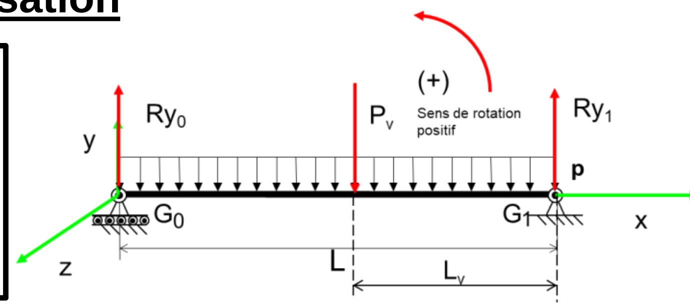


figure 1

❑ La résolution par la RdM se fait en trois étapes



Composant (poutre ?)
Schématisation
Liaisons/sollicitations
Hypothèses de la RdM



II. Etape 2: Résolution du problème statique :

recherche actions "passives"

$$\begin{cases} Ry_0 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L_v)}{L} \\ Ry_1 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L - L_v)}{L} \end{cases}$$

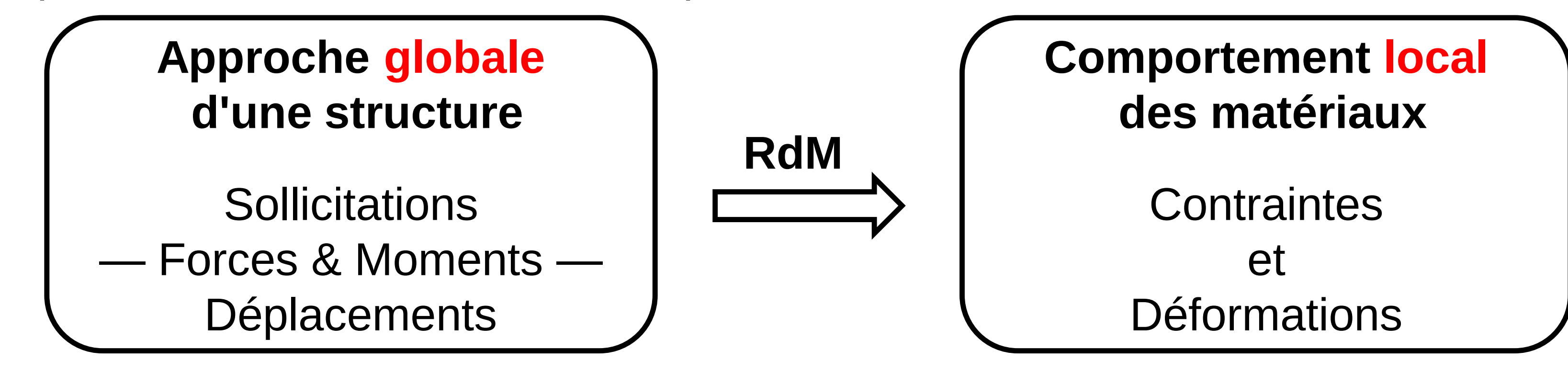
III. Etape 3: Dimensionnement

Vérification de critères en contrainte ou en déformation



1.4 C'est quoi la RdM (Résistance des Matériaux)?

- La **Résistance des Matériaux** (RdM) constitue la base des sciences de **dimensionnement des structures.** Elle traite les problèmes "simples" liés au comportement et au dimensionnement **des poutres**.
- Elle permet à partir du respect de **critères de résistance** et **de déformations admissibles** de (pré)dimensionner au plus juste une structure en garantissant un coût financier acceptable.
- Elle fait partie de la **Mécanique des Milieux Continus**.
- Elle est utilisée dans la Conception Mécanique, le Génie Civil et dans les bureaux d'études (dimensionnement de structures).





- **Partie 1 : Contraintes, Déformations, Loi de comportement**
- ***Notion de contraintes:***
  - Vecteur contrainte, état de contrainte : déterminer un vecteur contrainte à partir d'un état de contrainte, contraintes principales, contrainte normale, contrainte de cisaillement, …
- ***Notion de déformations:***
  - Transformation homogène et/ou hétérogène d'un matériau
  - Vecteur déformation, état de déformation : déformation normale, distorsion,
- ***Caractérisation mécanique d'un matériau***
  - Essai de traction
  - Comportement d'un matériau
- ***Lois de comportement***
  - Loi de Hooke uniaxiale, loi de Hooke généralisée, grandeurs caractéristiques des matériaux homogènes isotropes

- **Partie 2 : Poser un problème en RDM**
- ***Les 3 Étapes de résolution d'un Pb de RDM (Théorie des poutres):***

1) Schématisation d'un problème, hypothèses de la RDM

  - *La représentation graphique d'une poutre (fibre moyenne)*

2) Recherche des actions "passives" Application du PFS :

- Problèmes: hypostatique, isostatique, hyperstatique
  - *Identification et calcul des réactions de liaisons*

3) Dimensionnement / Vérification / Identification :

- Application de la méthode des coupures,
- Détermination des éléments de réduction (ou de cohésion)
  - *Équations d'équilibre en RdM*
  - *Équations d'équilibre en contraintes*
    - *Propriétés de surface (Moment quadratique, Moment polaire)*



- **Partie 3 : Les sollicitations simples en RDM (théorie des poutres)**
- ***Etudes des sollicitations simples:***
  - La traction/compression,
  - Le cisaillement,
  - La torsion,
  - La flexion (flexion pure, flexion simple, …)
- ***Objectifs:***

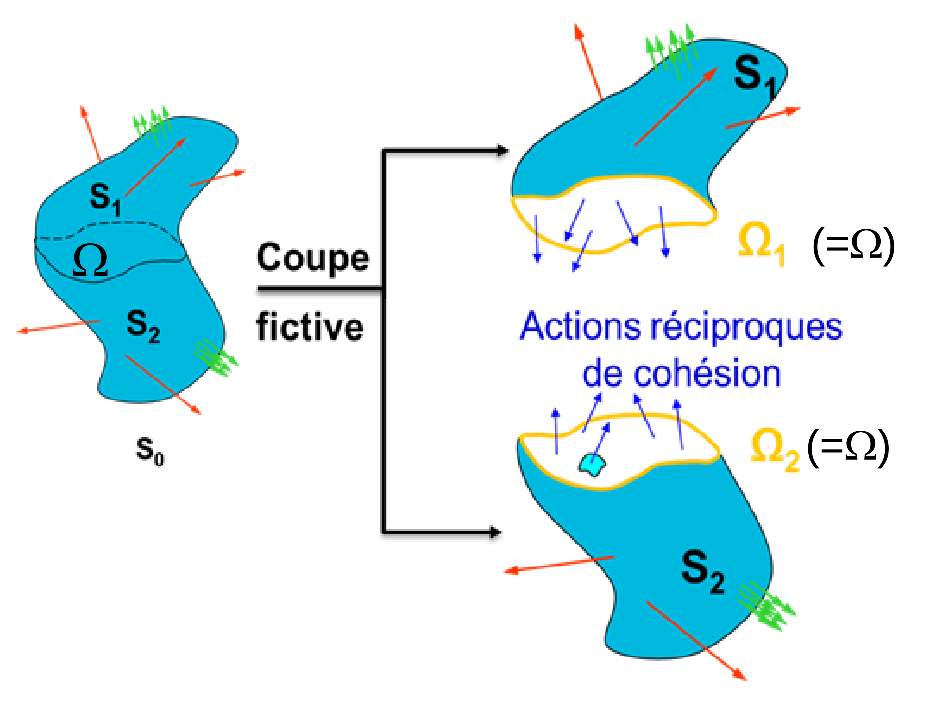
- Identification des éléments de réduction ⬄ Sollicitations simples
- Dans une section quelconque de la poutre, établir le lien entre les éléments de réduction (au centre de gravité) et l'état de contraintes (en dehors du centre de gravité)
- Détermination de la contrainte maximale
- Application d'un critère de résistance ou de comportement pour dimensionner ou vérifier les dimensions d'une poutre



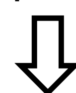
Partie 1

1. NOTION DE CONTRAINTE
2. NOTION DE DÉFORMATION
3. CARACTÉRISATION MÉCANIQUE D’UN MATÉRIAU
4. LOI DE COMPORTEMENT

- Soient:
  - **S_0** un **solide en équilibre** sous l'action de sollicitations extérieures ➔ $\overrightarrow{\sum F_{ext}} = \vec{0}$
  - **S_0** est divisé en deux solides **S_1** & **S_2** obtenus par une coupe fictive de séparation Ω



S_0 est en équilibre statique



Chacun des solides **S_1** et **S_2** est **en équilibre** sous l'action de:

- Sollicitations extérieures
- Sollicitations internes

⇩

S_1 en équilibre ⇨ $\overrightarrow{\sum F_{ext/S_1}} + \overrightarrow{\sum F_{int/S_1}} = \vec{0}$

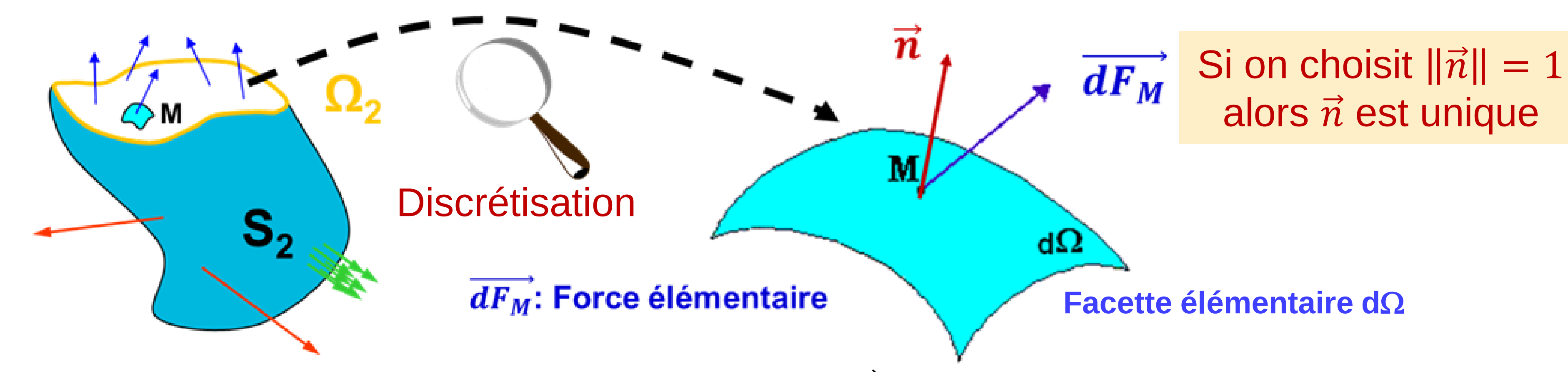
S_2 en équilibre ⇨ $\overrightarrow{\sum F_{ext/S_2}} + \overrightarrow{\sum F_{int/S_2}} = \vec{0}$

Les sollicitations internes sont appelées **efforts de cohésion**



- Pour évaluer la résistance du solide **S_0** aux efforts extérieurs $\overrightarrow{F_{ext}}$; il faut connaitre la distribution des efforts de cohésion en toute section fictive

- Soit le solide $\mathbf{S_2}$ et soit un point M localisé sur la surface $\mathbf{\Omega_2}$
- On identifie autour du point M une facette élémentaire **dΩ** de **vecteur normal sortant** (au point M) $\vec{\boldsymbol{n}}$ ($\vec{n}$ est le vecteur caractéristique de la surface)



❑ **Définition**: **le vecteur contrainte** (on le note $\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}})$) au point M de la surface dΩ de normale sortante $\vec{\boldsymbol{n}}$ est donné par:

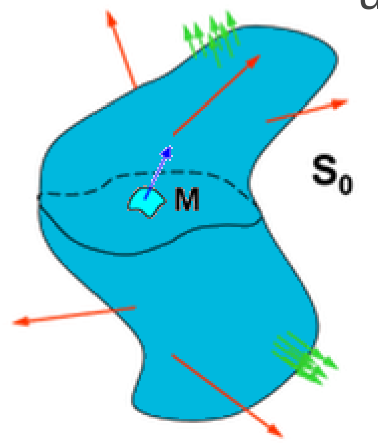
$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{d\Omega \to 0} \frac{\overrightarrow{dF_M}}{d\Omega}$$

Contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$
σ_n
$\vec{n}$
M
$\vec{t}$
τ
dΩ→0





- un vecteur contrainte est **toujours rattaché à une facette $d\Omega$ unique**



- Par continuité du milieu, en tout point M d'un corps déformable, on peut choisir une facette et lorsque $d\Omega \rightarrow 0$ associer un **vecteur contrainte (noté $\vec{T}(M,\vec{n})$)**, ce vecteur est déterminé pour **une seule facette $d\Omega$**, il dépend de la direction du vecteur normal $\vec{n}$ **($\vec{n}$ vecteur de norme 1)**.

- Pour **chaque point M** d'un corps rigide, on peut identifier une **infinité de facettes d'orientations différentes**, donc définir **une infinité** de vecteurs contrainte dont la valeur **dépend de l'orientation du vecteur normal $\vec{n}$** de la facette retenue.

❑ **Unités des contraintes** dans le S.I. des unités:

- Une contrainte s'exprime en N/m² (rappel : 1 N/m² = 1 Pa).
- **En mécanique** : on exprime **les contraintes en MPa**

Pour avoir un système d'unités homogène : on exprimera les **longueurs en mm** et les **forces en Newton**.

1 MPa = 1 N/mm² = 10^6 Pa

- Le vecteur contrainte $\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}})$ est composé de **deux contraintes aux agissements différents / plan de la facette**:

Contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$; σ_n ; $\vec{n}$; M ; en un point M ; $\vec{t}$; $d\Omega$; τ

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau\,\vec{t}$$

Contrainte normale (σ_n) au plan tangent de la facette (de normale $\vec{n}$)

- colinéaire à $\vec{n}$
- $\sigma_n > 0$: traction
- $\sigma_n < 0$: compression

$$\sigma_n(M,\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{n})$$

$$\overrightarrow{\sigma_n(M,\vec{n})} = \sigma_n \cdot \vec{n}$$



Contrainte tangentielle ou de cisaillement (τ) au plan tangent de la facette (de normale $\vec{n}$)

- $\vec{t}$ perpendiculaire à $\vec{n}$ est contenu dans le plan $\left(\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}}),\vec{n}\right)$

$$\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n}) = \left\|\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}}) \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right\|$$

$$\overrightarrow{\tau(M,\vec{n})} = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{\tau(M,\vec{n})} = \vec{n} \wedge \vec{T}(M,\vec{n}) \wedge \vec{n}$$

Toujours s'assurer $\|\vec{\boldsymbol{n}}\| = 1$



- Soit **le vecteur contrainte** $\vec{T}(M,\vec{n})$ **qui s'exprime** par : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \begin{bmatrix} 125 \\ 60 \\ -40 \end{bmatrix}$

associé à la facette de direction normale $\vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

1. Vérifier que $\|\vec{n}\| = 1$

2. Calculer σ_n ?

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M,\vec{n}) \qquad \sigma_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 125 + \frac{3}{4} \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 40 \qquad \sigma_n = 79{,}13 \text{ MPa}$$

3. Calculer τ?

M1: $$\tau = \sqrt{\left\|\vec{T}(M,\vec{n})\right\|^2 - \sigma_n{}^2} \qquad \tau = \sqrt{125^2 + 60^2 + 40^2 - 79{,}13^2} \qquad \tau = 120{,}68 \text{ MPa}$$

M2: $$\vec{\tau} = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n \vec{n} \qquad \vec{\tau} = \begin{bmatrix} 125 \\ 60 \\ -40 \end{bmatrix} - 79{,}127 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad \vec{\tau} = \begin{bmatrix} 90{,}73 \\ 0{,}65 \\ -79{,}56 \end{bmatrix}$$

M3: $$\overrightarrow{\tau(M,\vec{n})} = \vec{n} \wedge \vec{T}(M,\vec{n}) \wedge \vec{n}$$

$$\vec{T}(M,\vec{n}) \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} 125 \\ 60 \\ -40 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -10\sqrt{3} - 62{,}5 \\ \frac{375}{4} - 15\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \vec{n} \wedge \vec{T}(M,\vec{n}) \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 60 \\ -79{,}82 \\ 67{,}77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90{,}73 \\ 0{,}65 \\ -79{,}56 \end{bmatrix}$$

1.5 Vecteur contrainte: INSUFFISANT POUR TRADUIRE UN ETAT DE CONTRAINTE

- En tout point M d'un solide, la connaissance d'un vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ est insuffisante, pour traduire ce que supporte ce point M au sein de la matière.
- Pour avoir une information complète de l'état de contrainte au point M, il faudrait exprimer les vecteurs contrainte pour toutes les directions possibles du vecteur $\vec{n}$, ce qui est **impossible**.

- Pour pallier à cette impossibilité, est-il possible de créer un "objet" mathématique qui pour tout point M permettrait de déterminer pour toute direction $\vec{n}$ le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ lui correspondant.

- L'objet existe, il s'agit d'une fonction : **exprimée dans un repère**, elle est définie à partir d'une Matrice dite **Matrice de contraintes**, (Tenseur de contraintes) **unique**.



❑ État de contrainte: Définition de la matrice (Tenseur) de contrainte

- $\forall\, M \in S_0$, on peut définir une application linéaire $\bar{\bar{\sigma}}$: $(\boldsymbol{E_3} \rightarrow \boldsymbol{E_3})$ qui à tout vecteur unitaire $\vec{n}$ associe un vecteur contrainte $\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})$. Dans une base orthonormée directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, l'application $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}$ est telle que:

$$\forall\, M \in S_0 \quad \begin{cases} \boldsymbol{E_3} \rightarrow \boldsymbol{E_3} \\ \vec{n} \rightarrow \vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}\,\vec{n} \end{cases}$$

- Dans un repère de travail $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, l'application $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ est caractérisée par une matrice (3x3) appelée **matrice des contraintes,** c'est un **tenseur.**

- **Remarque:** la position d'un coefficient du tenseur $[\sigma_{ij}]$:
- **(i)**: N° de **ligne**
  (j) : N° de **colonne**

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})}$$



- La matrice des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ **caractérise totalement l'état de contrainte** au point M.

❑ État de contrainte: Identification des coefficients de la matrice de contrainte

- Soit $\vec{n}$ exprimé dans un repère orthonormé direct $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

$$\vec{n} = n_1\vec{e_1} + n_2\vec{e_2} + n_3\vec{e_3} \qquad \vec{n} \longrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

$\vec{e_2}$ $\vec{n}$ M $\vec{e_3}$ dΩ $\vec{e_1}$ en un point M

- **Etat de contrainte: cas général: $\forall \vec{n}$**

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\,.\vec{n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\vec{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \bar{\bar{\boldsymbol{a}}}\,.\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{T}(M,\vec{e_i})$$

- **Etat de contrainte: cas particulier: $\vec{n} = \vec{e_i}$;**

$$\vec{T}(M,\vec{e_i}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.\vec{e_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})} = \begin{bmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

$a_{1i} = \sigma_{1i}$, $a_{2i} = \sigma_{2i}$ et $a_{3i} = \sigma_{3i}$ sont respectivement les composantes des vecteurs contrainte associés aux facettes de normales les vecteurs $\vec{e_i}$, vecteurs directeurs de la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1.7 Matrice des contraintes: contrainte normale/ contrainte de cisaillement

- Identification du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ **pour une facette de normale $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\| = 1$)**

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = [\sigma_{ij}]\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(\vec{n}) = \sigma_{11}\cdot n_1 + \sigma_{12}\cdot n_2 + \sigma_{13}\cdot n_3 \\ \sigma_2(\vec{n}) = \sigma_{21}\cdot n_1 + \sigma_{22}\cdot n_2 + \sigma_{23}\cdot n_3 \\ \sigma_3(\vec{n}) = \sigma_{31}\cdot n_1 + \sigma_{32}\cdot n_2 + \sigma_{33}\cdot n_3 \end{bmatrix}$$

Cas général: $\forall\, \vec{n}$ **($\|\vec{n}\| = 1$)**

$$\vec{T}(M,\vec{e_i}) = \begin{bmatrix} \sigma_1(\vec{e_i}) = \sigma_{1i} \\ \sigma_2(\vec{e_i}) = \sigma_{2i} \\ \sigma_3(\vec{e_i}) = \sigma_{3i} \end{bmatrix}$$

Cas particulier: $\vec{n} = \vec{e_i}$

- Valeur de la **contrainte normale σ_n** à partir de $\vec{T}(M,\vec{n})$

$$\sigma_n(M,\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{n}) = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$si\ \vec{n} = \vec{e_i}$

$\sigma_n(\vec{e_i}) = \sigma_{ii}$

- Valeur de la **contrainte de cisaillement τ** à partir de $\vec{T}(M,\vec{n})$

$$\vec{\tau}(M,\vec{n}) = \vec{n}\wedge\vec{T}(M,\vec{n})\wedge\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix} \sigma_1(\vec{n}) \\ \sigma_2(\vec{n}) \\ \sigma_3(\vec{n}) \end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n}) = \left\|\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}})\wedge\vec{\boldsymbol{n}}\right\|$$

$$\vec{\tau}(M,\vec{n}) = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & n_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

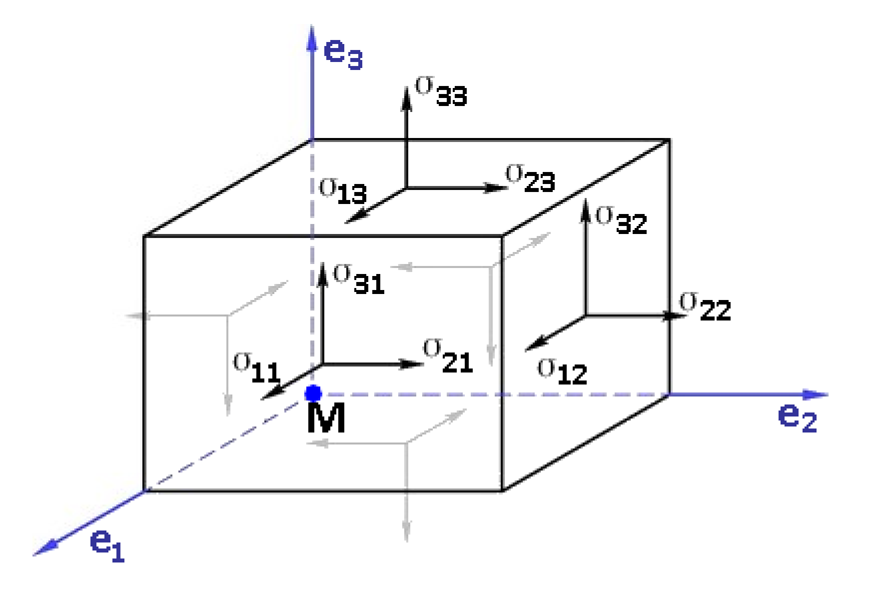


❑ Représentation graphique d'un état de contrainte en un point M

L'état de contrainte est exprimé en un point M dans un repère $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ par:

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})} \qquad \vec{T}(M,\overrightarrow{e_i}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{bmatrix}$$

On représente l'état de contrainte sous la forme d'un cube de sommet M, de faces normales à $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, sur lesquelles on reporte chaque composante des vecteurs contrainte associés $\vec{T}(M,\overrightarrow{e_i})$



Rq : Etant donnée la définition du vecteur contrainte : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{d\Omega \to 0} \frac{\overrightarrow{dF_M}}{d\Omega}$

ce cube a un volume qui tend vers le volume nul.

(en fait il s'agit d'un point)



- La matrice des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ est **symétrique** à coefficients réels.
- La matrice des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ est **diagonalisable.** Ainsi, il existe toujours un repère unique $(\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3})$ dans lequel $\bar{\bar{\sigma}}$ est diagonale.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3})}$$

- $(\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{k_2}, \overrightarrow{k_3})$ est appelé **repère principal** de contraintes.
- $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ sont les **valeurs propres** de $\bar{\bar{\sigma}}$ et sont appelées **contraintes principales**.

- La matrice des contraintes possède **trois invariants I_i :**

- Cas 1: dans un repère général

$$I_1 = trace(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\sigma_{ii}.\sigma_{jj} - \sigma_{ij}.\sigma_{ij})$$

$$I_3 = det(\sigma_{ij})$$

$\Rightarrow$

- Cas 2: Dans le repère principal

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \sigma_I.\sigma_{II} + \sigma_{II}.\sigma_{III} + \sigma_{III}.\sigma_I \\ I_3 = \sigma_I.\sigma_{II}.\sigma_{III} \end{cases}$$

- Les **valeurs propres** sont racines du **polynôme caractéristique** :

$$\det(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda\bar{\bar{I}}) = 0$$

❑ Changement de repère d'un Etat de contrainte:

- Soit $\bar{\bar{\sigma}}$ une matrice des contraintes en un point M exprimée dans un repère $R1\ (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ notée $\bar{\bar{\sigma}}_{R1}$.
- Soit $R2\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$ un deuxième repère de travail tq $R1 \neq R2$.

On peut alors exprimer la matrice des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ dans le repère $R2$ par la **matrice de passage** ${}^{R1}T_{R2}$: $R1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \longrightarrow R2\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$ qui $\bar{\bar{\sigma}} \longrightarrow \bar{\bar{\sigma}}'$ tq:

$$\bar{\bar{\sigma}}'_{R2} = \overline{\overline{{}^{R2}T_{R1}}} \times \bar{\bar{\sigma}}_{R1} \times \overline{\overline{{}^{R1}T_{R2}}}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \overline{\overline{{}^{R2}T_{R1}}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \overline{\overline{{}^{R1}T_{R2}}}$$

Rappel

$$\overline{\overline{{}^{R1}T_{R2}}} = \left[T'^{i}_{\ j}\right]$$

Vecteur de R_2 dans R_1



$\bar{\bar{\sigma}}'$ identifie le même état de contrainte que $\bar{\bar{\sigma}}$ dans le repère R2 .

1.8 Fiche récapitulative

Vecteur contrainte

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overrightarrow{\sigma_n(M,\vec{n})} + \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n})}$$

Contrainte normale

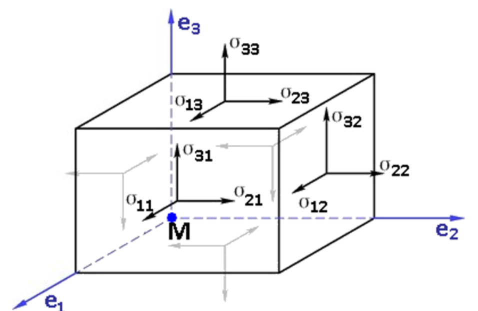
$$\sigma_n(M,\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{n})$$

Contrainte de cisaillement

$$\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n}) = \left\|\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}}) \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\,\right\|$$

Etat de contraintes

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$



Vecteur contrainte

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \qquad \|\vec{\boldsymbol{n}}\| = \mathbf{1}$$

$$\vec{T}(M,\vec{e_i}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{bmatrix}$$

Etat de contraintes principales

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3})}$$

Changement de repère

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}'_{R2} = \overline{\overline{{}^{R2}T_{R1}}} \times \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{R1} \times \overline{\overline{{}^{R1}T_{R2}}}$$



TRANSITION (WOOCLAP -EX)



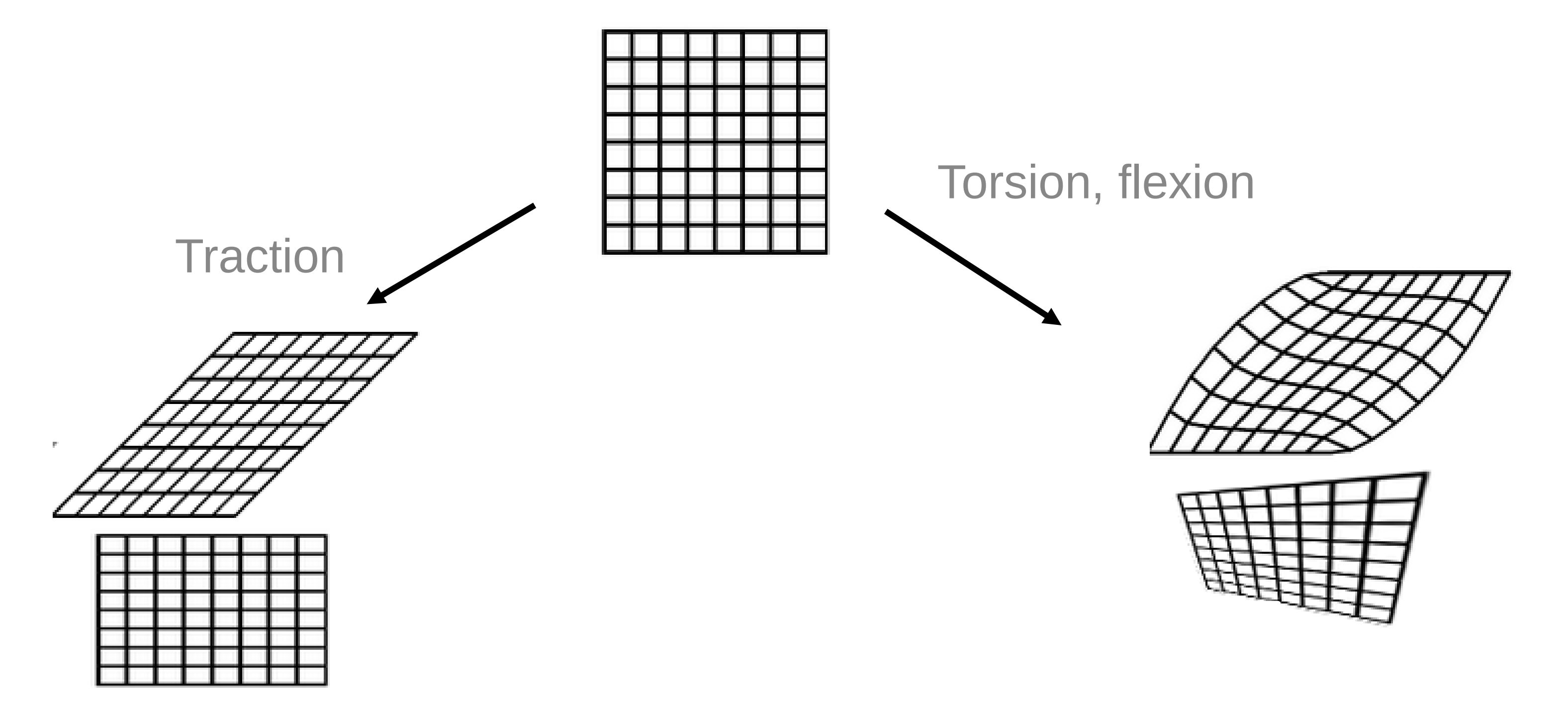
Partie 1

1. NOTION DE CONTRAINTE
2. NOTION DE DÉFORMATION
3. CARACTÉRISATION MÉCANIQUE D’UN MATÉRIAU
4. LOI DE COMPORTEMENT

2.1 Illustration : Transformation d'un milieu continu

Tout matériau qui supporte une sollicitation (mécanique, thermique,…), se transforme géométriquement. **Deux types de transformations peuvent être identifiées**

Exemple: transformations possibles d'un carré quadrillé

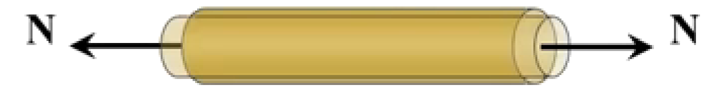


Lorsque tous les carrés déformés sont superposables, la **transformation est homogène** (en chaque point la déformation est identique)

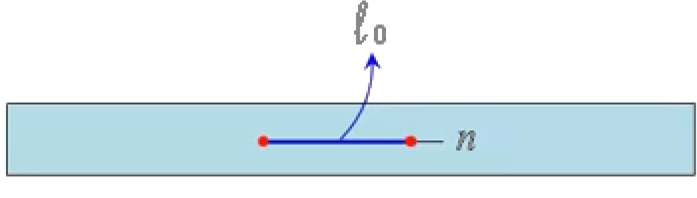
Dans le cas contraire la **transformation est hétérogène** (chaque point ne présente pas une déformation identique).

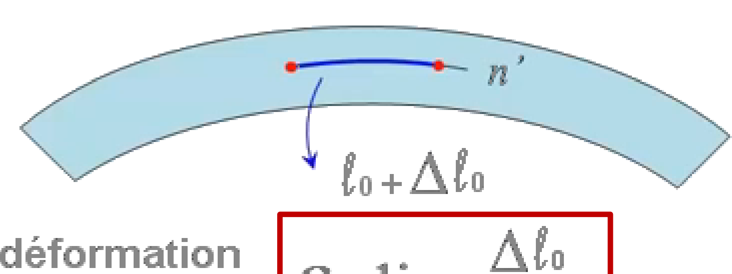
Un matériau peut se déformer en changeant de dimension **(expansion)** et/ou en changeant de forme **(distorsion)**

❑ Nature des déformations



Déformation normale : ε

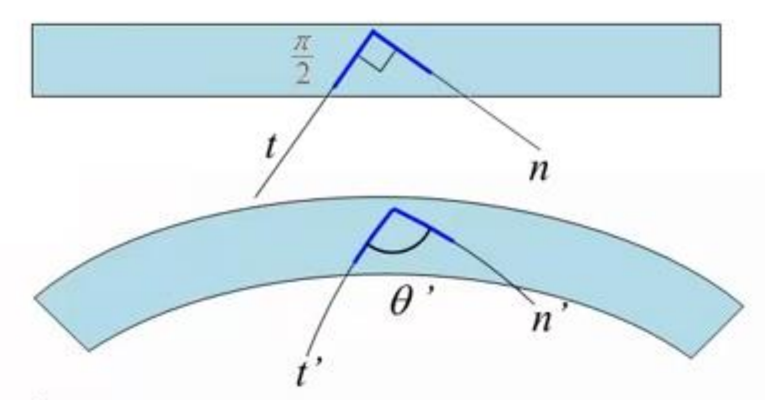




déformation normale : $\varepsilon = \lim\limits_{\ell_0 \to 0} \dfrac{\Delta\ell_0}{\ell_0}$



Déformation due au cisaillement : γ



déformation due au cisaillement

angle de glissement : $\gamma_{nt} = \dfrac{\pi}{2} - \theta'$

si $\gamma<0$: $\theta' > \pi/2$ et si $\gamma>0$: $\theta' < \pi/2$



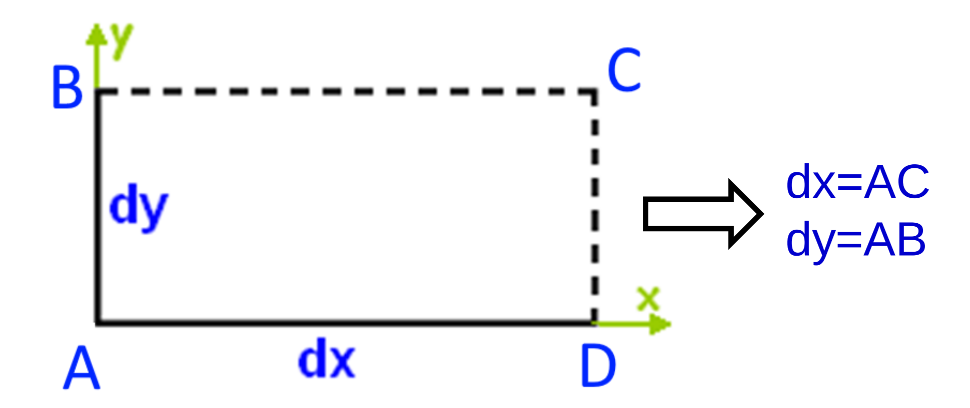
❑ Exercice résolu: Déformation due au cisaillement

Superposition de l'état initial (au repos) et l'état déformé

Déterminer les déformations ε_{xx} , ε_{yy} et le glissement γ_{xy}

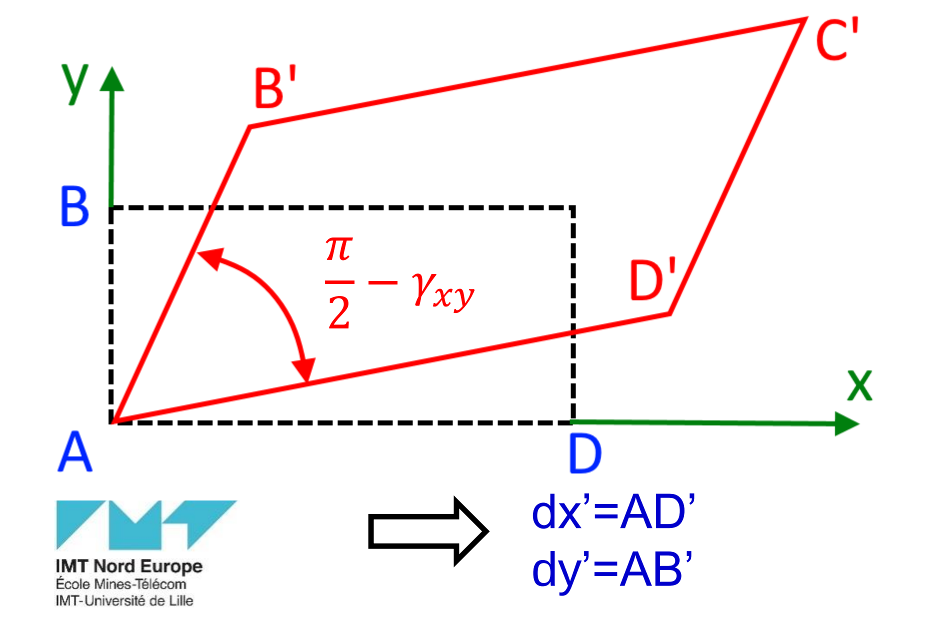


- Etat avant déformation



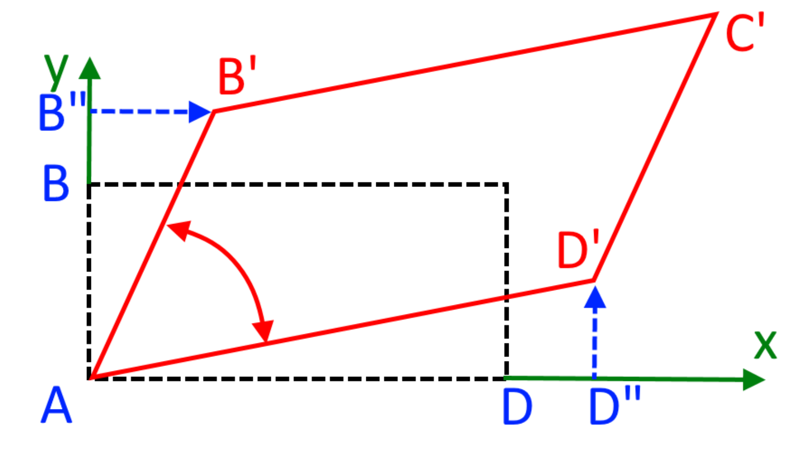
dx=AC
dy=AB

- Etat après déformation



dx'=AD'
dy'=AB'

- **Les déformations ε_{xx} , ε_{yy}**



Dans le cadre des petites deformations

dx'=AD' ≈AD"
dy'=AB' ≈AB"

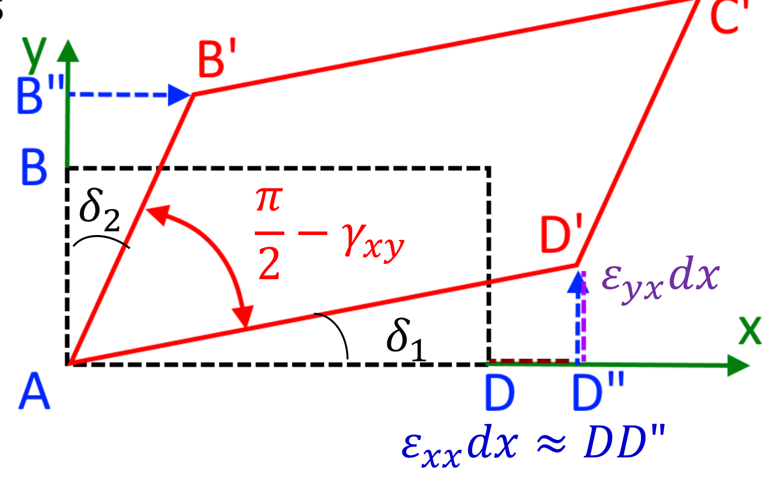
$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx} \Rightarrow \varepsilon_{xx} dx = dx' - dx$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{dy' - dy}{dy} \Rightarrow \varepsilon_{yy} dy = dy' - dy$$

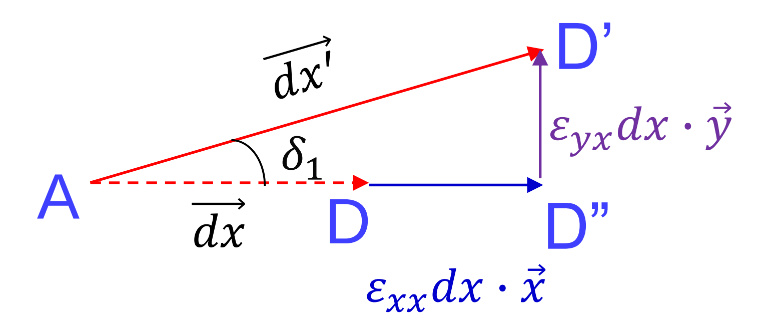
Dans le context de petites deformations

$$\varepsilon_{xx} dx = dx' - dx$$

$$\varepsilon_{yy} dy = dy' - dy$$



- **Le glissement:** $\gamma_{xy} = \delta_1 + \delta_2$
  - **Expression de δ_1**



$$\overrightarrow{dx'} = \overrightarrow{dx} + \varepsilon_{xx} dx \cdot \vec{x} + \varepsilon_{yx} dx \cdot \vec{y}$$

Dans le context de petites deformations

$$\mathrm{tg}\delta_1 \approx \delta_1 = \frac{\varepsilon_{yx}\, dx}{(1+\varepsilon_{xx})dx}$$

Dans le context de petites deformations

$$\varepsilon_{xx} \ll 1$$

$$\mathrm{tg}\delta_1 \approx \delta_1 = \frac{\varepsilon_{yx}\, dx}{(1+\varepsilon_{xx})dx} \approx \varepsilon_{yx}$$

- **Expression de δ_2**

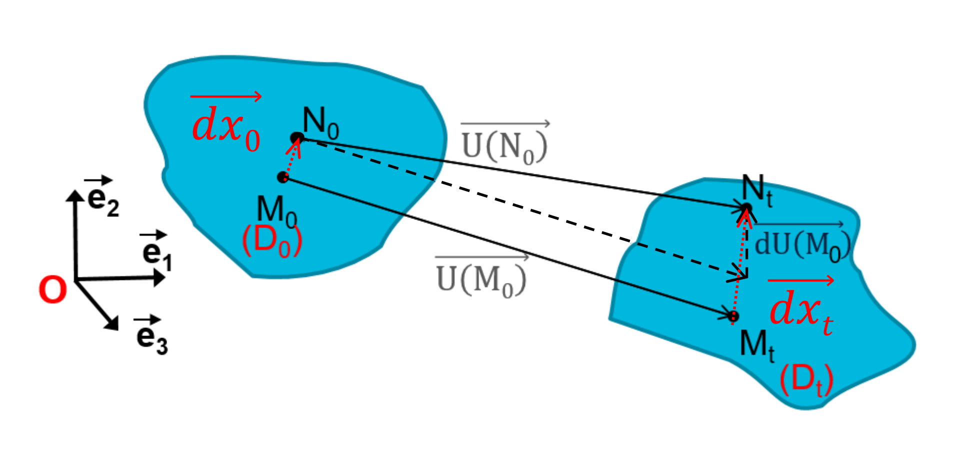
$$tg\delta_2 \approx \delta_2 = \frac{\varepsilon_{xy}}{1+\varepsilon_{yy}} \approx \varepsilon_{xy}$$

- **Expression du glissement**

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy}$$

Si $\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy}$ ⇨ $\gamma_{xy} = 2\,\varepsilon_{xy}$





Etudions la matrice : $\bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

$[\varepsilon_{ij}]$

Direction de projection du vecteur déformation

Direction Segment considéré

Analogie avec les contraintes :

pour tout point M, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est la matrice d'une application linéaire, qui à chaque direction $\vec{n}$ associe un vecteur déformation $\vec{\varepsilon}(M,\vec{n})$

$E_3 \longrightarrow E_3$

$\vec{n} \longrightarrow \vec{\varepsilon}(M,\vec{n})$

$$\vec{\varepsilon}(M,\vec{n}) = \bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{n} = \varepsilon_{n,n}\vec{n} + \varepsilon_{t,n}\vec{t}$$

$$\varepsilon_{t,n}\vec{t} = \vec{n} \wedge \vec{\varepsilon}(M,\vec{n}) \wedge \vec{n}$$

$\boldsymbol{\varepsilon_{nn}}$ est la **déformation normale** (assimilable à un allongement relatif)

$\boldsymbol{\varepsilon_{tn}}$ est la **déformation de distorsion** (assimilable à un angle)

2.5 Matrice de déformation : propriétés

Etudions la matrice : $\bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

- Mathématiquement la matrice de déformation se comporte de la même manière que la matrice de contraintes.
- Elle est symétrique, diagonalisable, on peut la changer de repère.
- Le repère principal est identique pour la matrice de déformation et de contrainte



Etudions la matrice : $\bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & .. & .. \\ .. & \varepsilon_{22} & .. \\ .. & .. & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

Les termes diagonaux caractérisent l'expansion dans les directions $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Variation relative de volume $\frac{dV}{V} = trace(\bar{\bar{\varepsilon}})$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} .. & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & .. & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & .. \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

Les termes extra-diagonaux caractérisent la distorsion dans les plans $(\vec{e_i}, \vec{e_j})$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$$

La matrice $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est symétrique diagonalisable



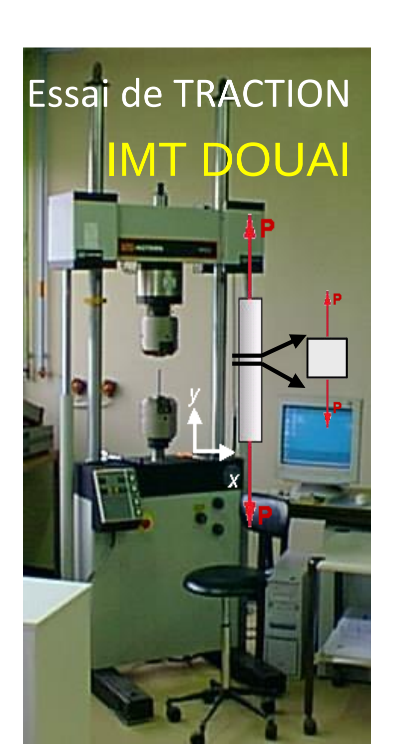
Partie 1

1. NOTION DE CONTRAINTE
2. NOTION DE DÉFORMATION
3. CARACTÉRISATION MÉCANIQUE D'UN MATÉRIAU
4. LOI DE COMPORTEMENT

3.1 Essai de traction

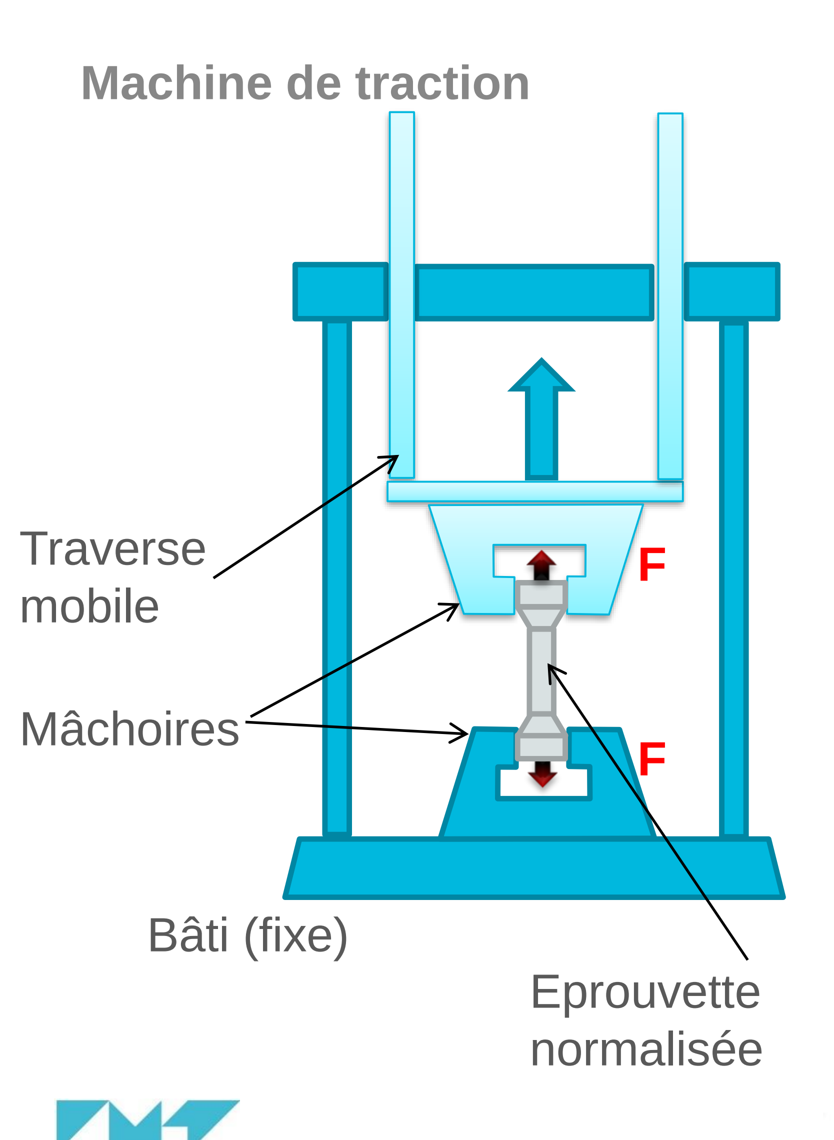
Une famille (**idéalisée**) de matériaux correspond aux **matériaux isotropes homogènes.** Ces matériaux présentent globalement une **organisation atomique identique dans toutes les directions**, et jusqu'à une certaine échelle (mésoscopique) peuvent être considérés comme ne présentant **pas d'hétérogénéité structurelle.**

Pour caractériser le **comportement mécanique** de ces matériaux , Il suffit de réaliser un **essai de traction** jusqu'à rupture de ce dernier, et de relever ce que l'on observe.





3.1 Essai de traction – Machine de traction

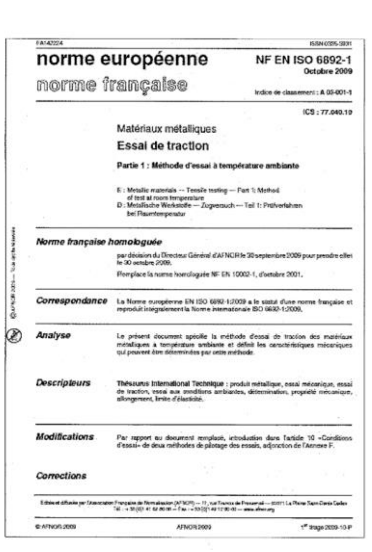


- L'essai de traction est à la base de la caractérisation des propriétés élastiques des matériaux, dont **E** et **ν** .

- Par l'intermédiaire d'une machine de traction, une éprouvette de **taille normalisée** est soumise à un effort longitudinal F croissant.

- La norme décrivant l'essai dépend de la famille du matériau, des conditions d'essai et du type d'application.

- L'exemple classique utilisé pour illustrer cet essai est la NF EN ISO 6892-1 Novembre 2016 - *Matériaux métalliques - Essai de traction - Partie 1 : méthode d'essai à température ambiante*



norme européenne NF EN ISO 6892-1
norme française Octobre 2009

Indice de classement : A 03-001-1

ICS : 77.040.10

Matériaux métalliques

Essai de traction

Partie 1 : Méthode d'essai à température ambiante

E : Metallic materials — Tensile testing — Part 1: Method of test at room temperature
D : Metallische Werkstoffe — *Zugversuch* — Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur

Norme française homologuée

par décision du Directeur Général d'AFNOR le 30 septembre 2009 pour prendre effet le 30 octobre 2009.

Remplace la norme homologuée NF EN 10002-1, d'octobre 2001.

Correspondance La Norme européenne EN ISO 6892-1:2009 a le statut d'une norme française et reproduit intégralement la Norme internationale ISO 6892-1:2009.

Analyse Le présent document spécifie la méthode d'essai de traction des matériaux métalliques à température ambiante et définit les caractéristiques mécaniques qui peuvent être déterminées par cette méthode.

Descripteurs **Thésaurus International Technique** : produit métallique, essai mécanique, essai de traction, essai aux conditions ambiantes, détermination, propriété mécanique, allongement, limite d'élasticité.

Modifications Par rapport au document remplacé, introduction dans l'article 10 «Conditions d'essai» de deux méthodes de pilotage des essais, adjonction de l'Annexe F.

Corrections

© AFNOR 2009 — AFNOR 2009

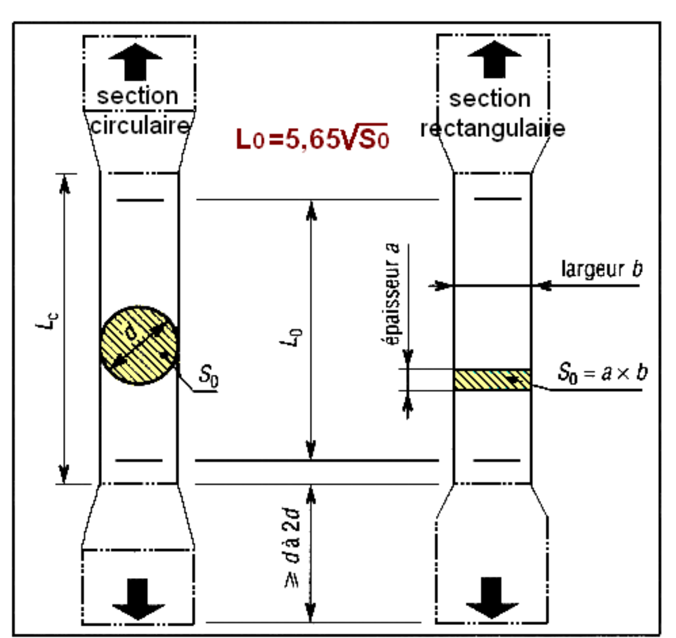
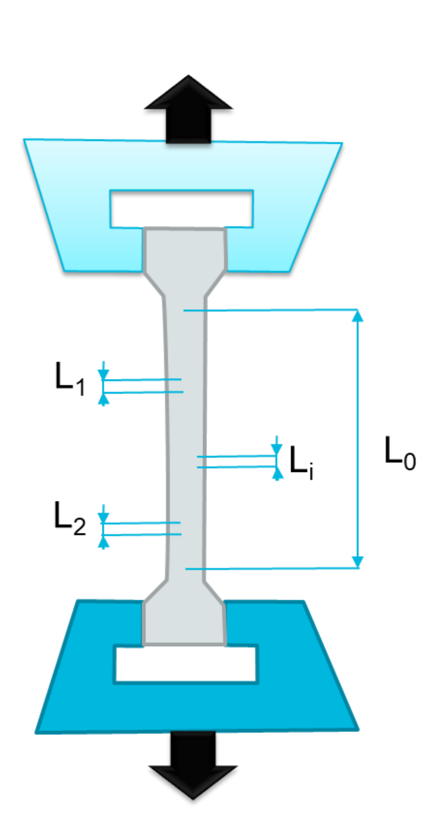


Schéma de principe de l'essai normalisé



La section initiale de l'éprouvette S_0 est constante.

La zone calibrée de l'éprouvette est de longueur totale L_0

ΔL_i représente la variation de longueur d'un segment de référence Li (segment parallèle à la force F)

Pour s'assurer de la représentativité de l'essai, on doit s'assurer que la variation relative de longueur est la même quelque soit le segment de référence L_i pris dans la zone calibrée.

Dans la zone calibrée L_0 **la transformation du matériau est homogène**

La variation relative de longueur correspond à la déformation ε_{11}

$$\varepsilon_{11} = \lim_{L \to 0} \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{\Delta L_2}{L_2} = \cdots = \frac{\Delta L_i}{L_i}$$



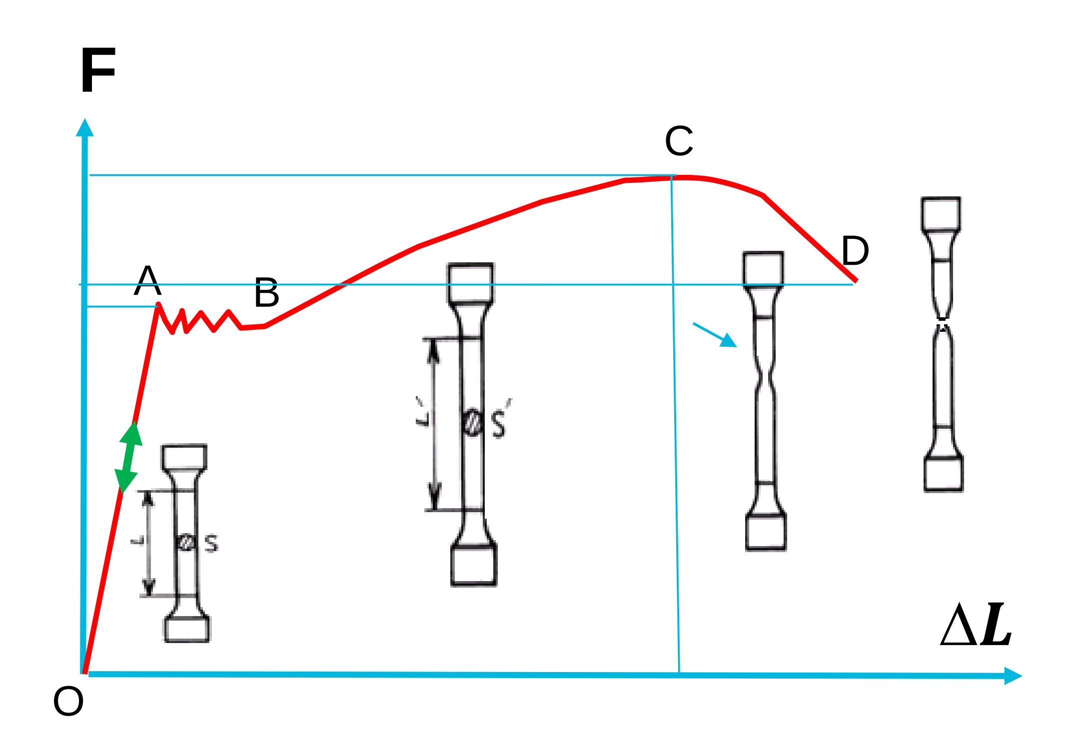
3.1 Essai de traction – par l'exemple

Video : Tensile test, Brauch & Trautwein, Karlsruhe University of Applied Sciences

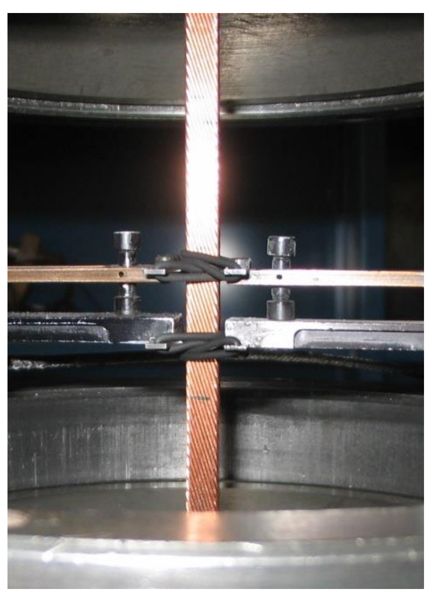
Pour plus de detail: consulter la capsule video sur MLS



- **Courbe Force/Allongement ΔL**





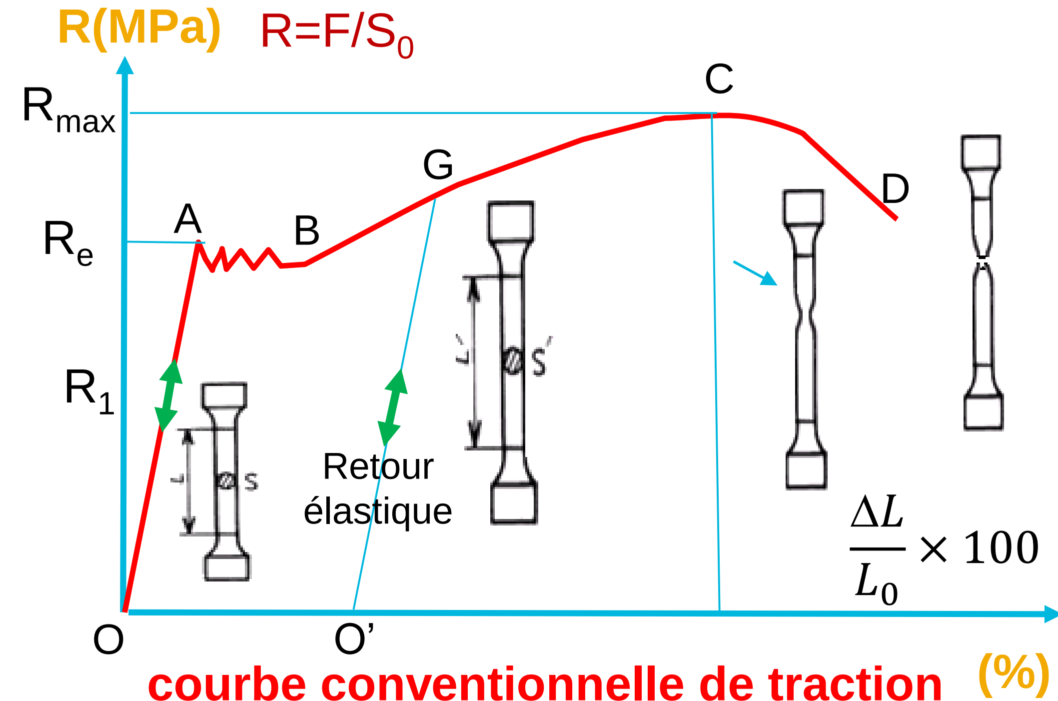




3.3 Essai de traction : courbe conventionnelle de traction

Enregistrement des capteurs de force et d'extensométrie :
Force , Allongement ΔL

Tracé de la **force unitaire** de traction en fonction de l'allongement pourcent



courbe conventionnelle de traction

(O'G) : en cours d'essai si la force est annulée, on observe un retour élastique du matériau (réversible)

Allongement ΔL (mm)

$R=F/S_0$: Force unitaire de traction (MPa)

Trois zones de comportement:

Zone élastique (OA)

- Allongement **linéaire réparti** : déformation totalement réversible.

(Zone de déformation plastique AD)

Zone d'écrouissage (AC)

- Allongement **non linéaire réparti** : déformation partiellement irréversible

(élastique+plastique)

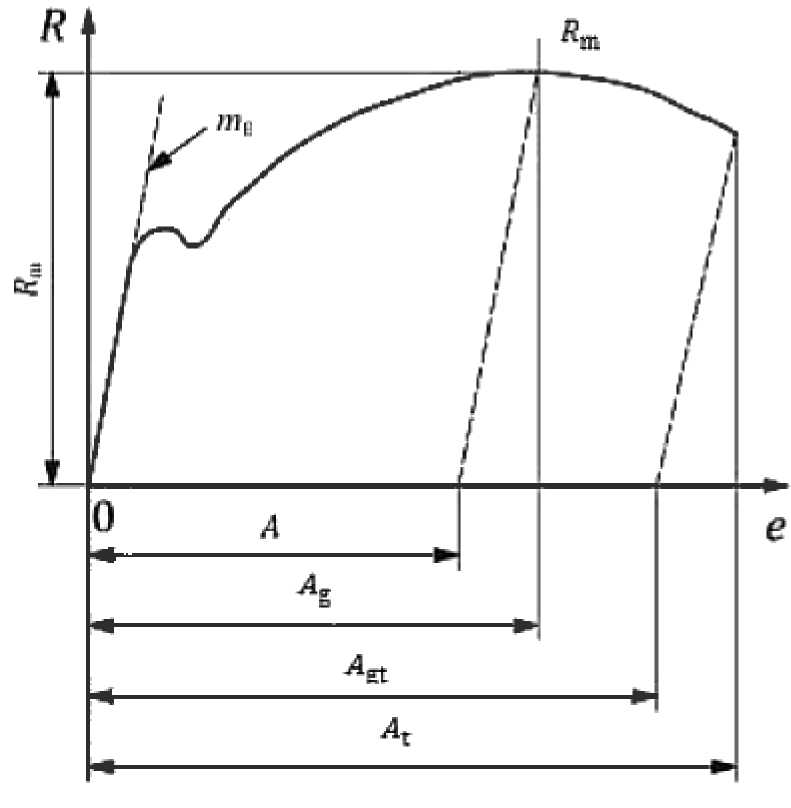
(**parfois** palier d'écoulement plastique AB)

Zone de striction (CD)

- **Allongement localisé** au niveau d'une section droite qui diminue jusqu'à rupture.



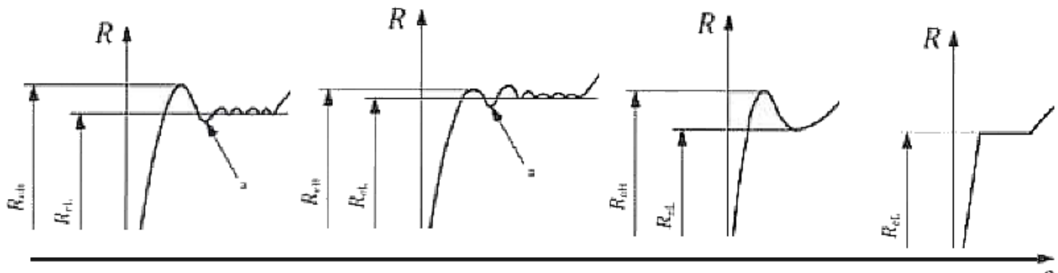
3.6 Essai de traction : valeurs d'essai



ISO 6892-1-2019
Matériaux métalliques essai de traction

Légende

- A pourcentage d'allongement après rupture [déterminé directement sur l'éprouvette
- A_g pourcentage d'extension plastique à la force maximale
- A_{gt} pourcentage total à la force maximale
- A_t pourcentage total à la rupture
- e pourcentage d'extension
- m_E pente de la partie élastique de la courbe de pourcentage de contrainte et de pourcentage d'extension
- R contrainte
- R_m résistance à la traction



Légende

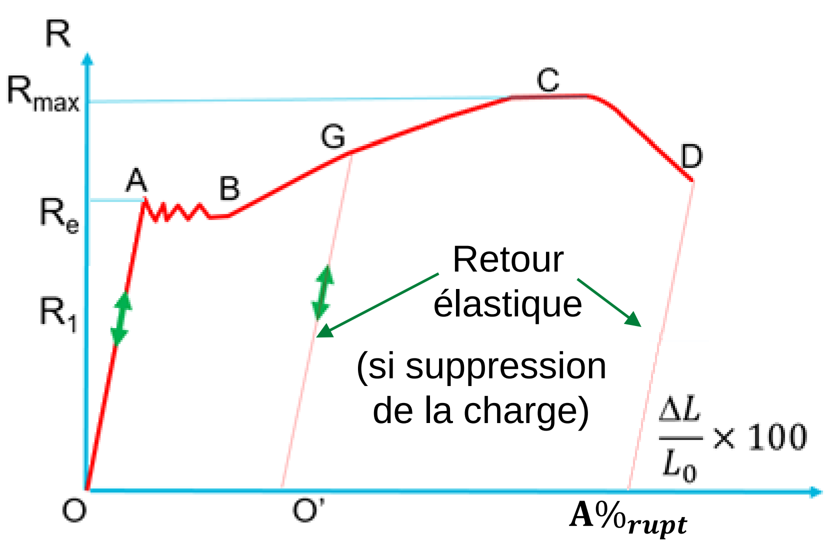
- e pourcentage d'extension
- R contrainte
- R_{eH} limite supérieure d'écoulement
- R_{eL} limite inférieure d'écoulement
- a Effet transitoire initial.



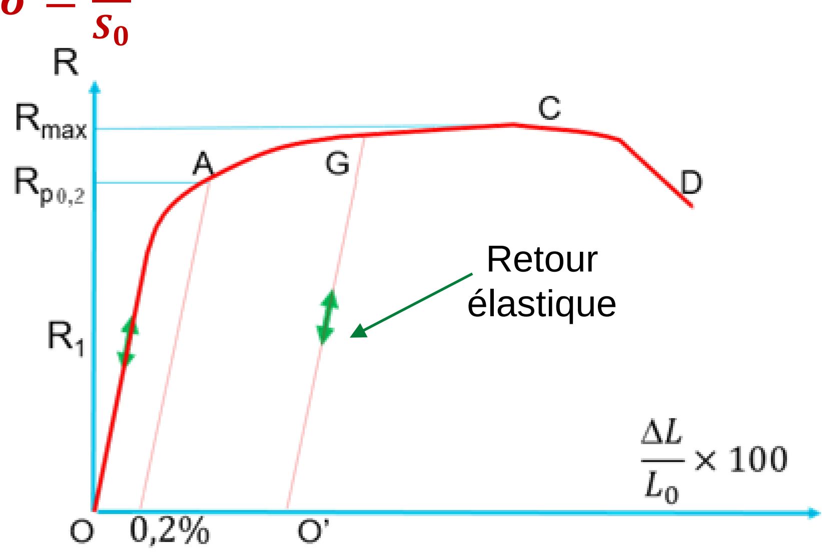
3.4 Essai de traction : courbe conventionnelle de traction

Grandeurs caractéristiques déterminées à partir de l'essai de traction

courbe conventionnelle de traction : $\sigma = \frac{F}{S_0}$



courbe conventionnelle de traction



courbe conventionnelle de traction

Limite apparente d'Elasticité nette (point A) (Aciers ferritiques)

$$(A): Re = \frac{F_e}{S_0} \qquad (C): R_m = \frac{F_m}{S_0}$$

$$A\%_{rupt} = \frac{Lu}{L_0} \times 100$$

Certains matériaux ne présentent pas de limite apparente d'élasticité nette (Aciers austénitiques, Aluminium,..)

On détermine une **Limite conventionnelle d'Elasticité** : avec allongement rémanent de 0,2%

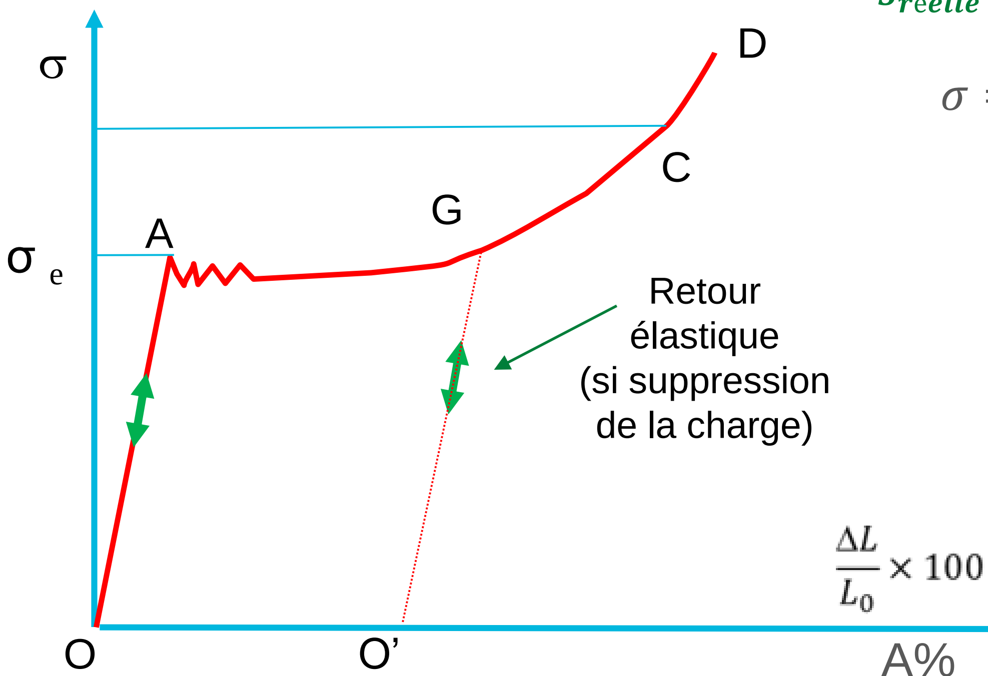
$$(A): R_{p0,2} = \frac{F_{p0,2}}{S_0} \qquad R_m = \frac{F_m}{S_0}$$



3.4 Essai de traction : courbe rationnelle de traction

En tenant compte des équilibres et des hypothèses de traction simple, on a

courbe rationnelle de traction : $\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{S_{réelle}}}$



$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{-N}{S}$$

(valide à condition d'enlever l'incidence de la géométrie)

ε : Déformation ou allongement unitaire(adimensionnel)

σ : Contrainte de traction réelle (MPa ou N.mm^{-2})

On distingue 2 zones de comportement :

- Un domaine élastique (entre $0 \leq \sigma_{11} \leq \sigma_e$)
- Un domaine plastique (pour $\sigma_{11} > \sigma_e$)

3.4 **Essai de traction** : courbe rationnelle typique

Courbe rationnelle : dépend du type de matériau

σ

Céramique

Métal "dur" et fragile

Métal ductile

Composite

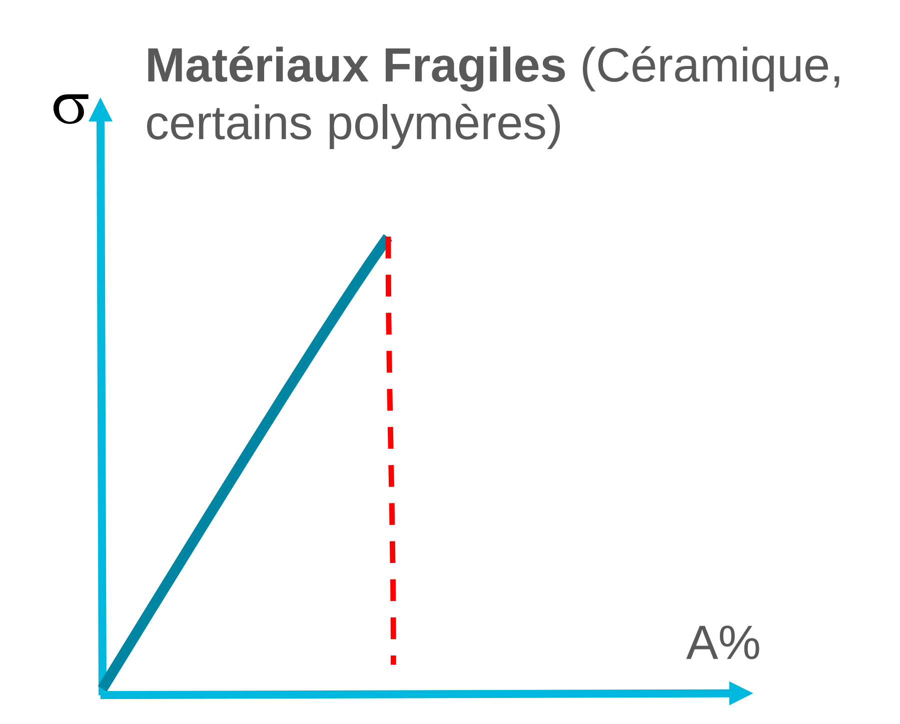
Polymère

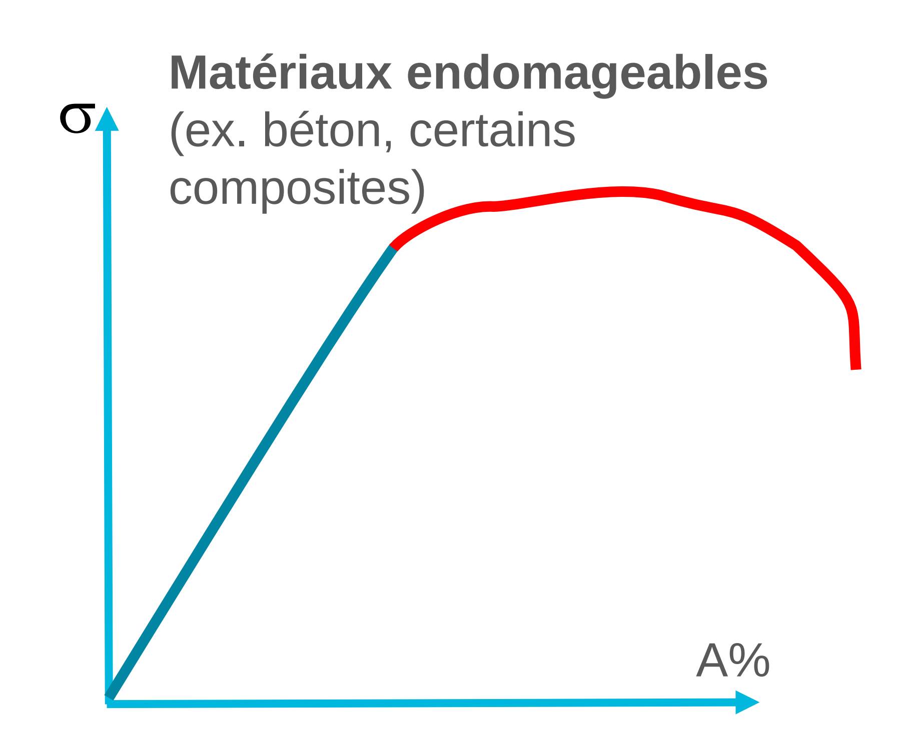
A%



3.4 Essai de traction : au-delà de la limite d'élasticité

❑ Comportements des Matériaux





→ Au-delà de la limite d'élasticité **Les matériaux fragiles** présentent une faible aptitude à supporter des déformations

→ Au-delà de la limite d'élasticité **Les matériaux endomageables** présentent une dégradation des propriétés

3.4 Essai de traction : au-delà de la limite d'élasticité

- Matériaux ductiles (métaux, certains polymères)

σ
Acier doux
A%

σ
Acier inox
A%

La ductilité est l'aptitude du matériau à supporter des déformations élevées (qq% à qq dizaines de %)



3.4 Essai de traction : matériaux symétriques et non symétriques

Matériaux symétriques : matériau ayant la même limite élastique en traction et en compression :

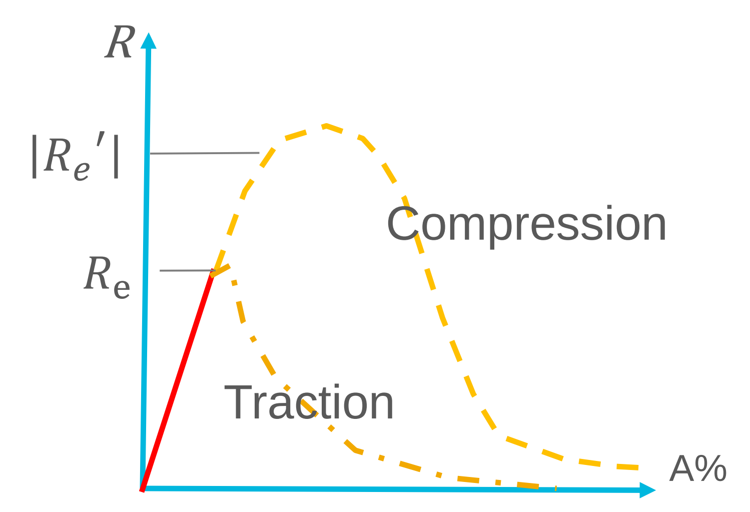
$$R_e = |R'_e|$$

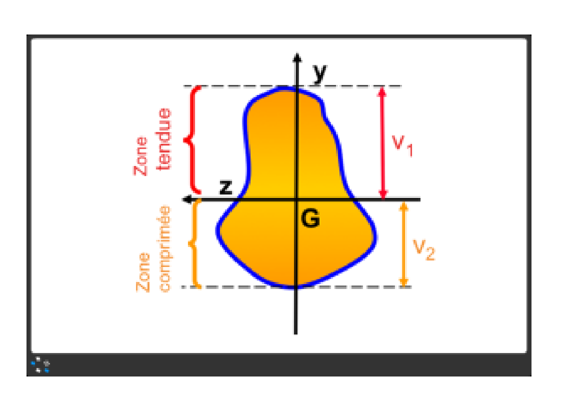
Matériaux non symétriques : les limites élastiques en traction et en compression sont différentes

En traction R_e En compression R_e' $R_e \neq |R'_e|$

Cas d'application : le béton avec le cas d'une poutre en flexion par exemple, fonte

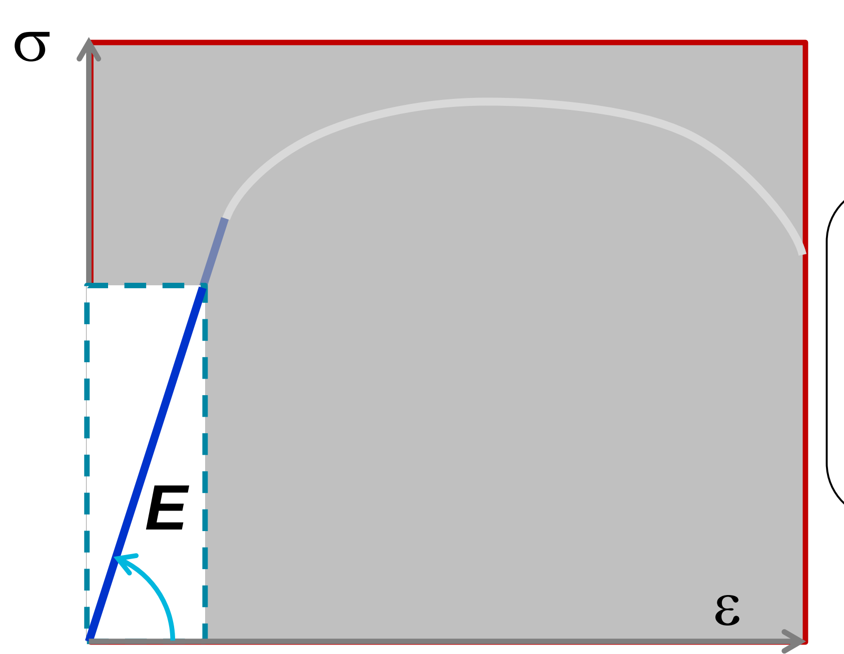
Exemple sur le béton







3.4 Essai de traction : Zone d'utilisation en RdM



Loi de Hooke en traction (1678)

« ut tensio sic vis » « telle extension, telle force »

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

(Sous cette forme la loi est uni axiale)

Point important !

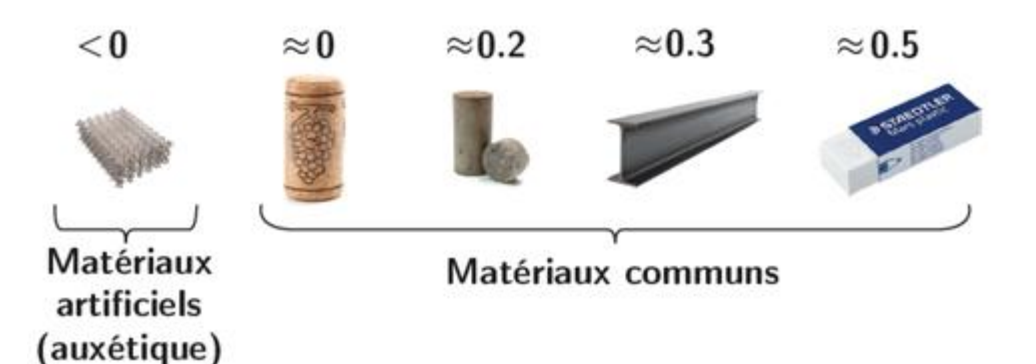
Les **théories de l'élasticité linéaire de la RdM** ne concernent que **le domaine élastique** des matériaux

- Dans ce domaine les déformations sont réversibles et n'excèdent pas quelques %

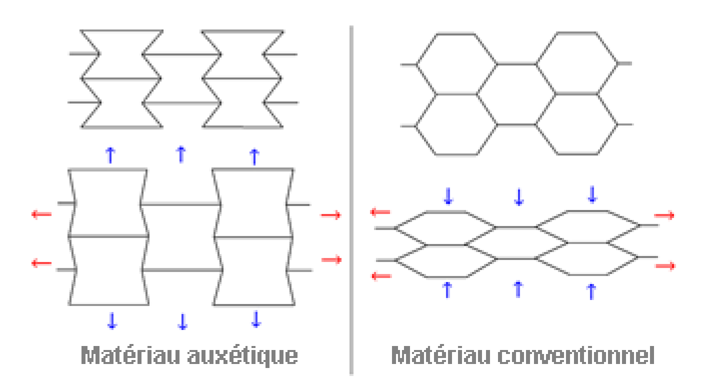


3.5 Quelques valeurs usuelles : **Module de Young** et **Coefficient de Poisson**

Coefficients de poisson



Valeurs typiques



E : Module de Young

- Très variable selon le matériau

Matériau	Module de Young E en MPa
Acier	210 000
Aluminium	70 000
Bois	5 500 à 12 000
Verre	60 000
Polystyrène	3 000
Béton	20 000 (comp) 50000 (trac.)
Céramique	Jusqu'à 1 000 000

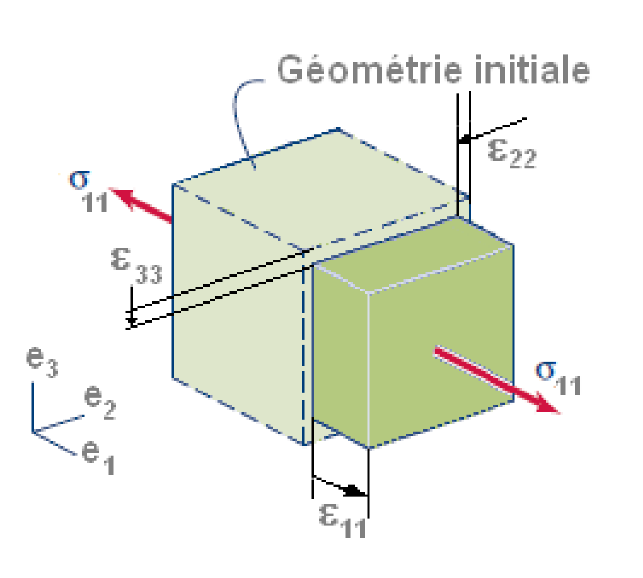


Cas uniaxial

- La majorité des matériaux dans le domaine des petites déformations présentent un comportement linéaire élastique. (hypothèses de la RDM)
- C'est-à-dire :

- Matériau isotrope

- On exerce sur un matériau une contrainte selon une direction (par exemple $\sigma_{11}\overrightarrow{e_1}$)



$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$$

- On observe alors l'état de déformation suivant :

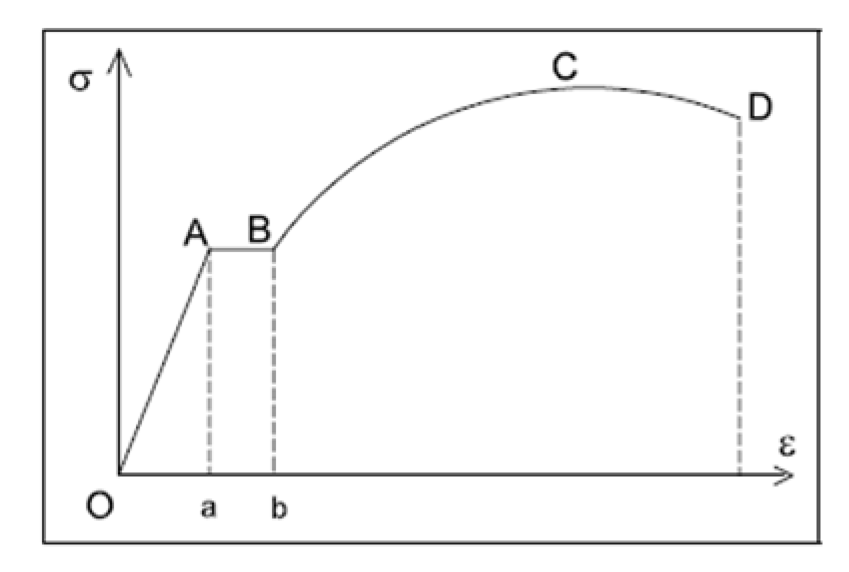
$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}(M)}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon_{11}} &= K\boldsymbol{\sigma_{11}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{22}} &= -\alpha\boldsymbol{\varepsilon_{11}} \\ \boldsymbol{\varepsilon_{33}} &= -\alpha\boldsymbol{\varepsilon_{11}} \end{aligned}$$

- Si on annule σ_{11} alors les déformations s'annulent et la forme reprend sa géométrie initiale



Un essai de traction est réalisé sur une éprouvette de longueur initiale 100mm

A : $\epsilon = 0,12\,\%$, $\sigma = 240$ MPa B : $\epsilon = 2,4\,\%$, $\sigma = 240$ MPa C : $\epsilon = 19\,\%$, $\sigma = 420$ MPa D : $\epsilon = 25\,\%$, $\sigma = 380$ MPa



1. La courbe correspond-elle à la courbe conventionnelle de traction ?
2. Identifier les zones de comportement
3. Déterminer Re, Rm, Rr
4. Calculer le module de Young (on précisera les unités)
5. Calculer l'allongement à la rupture
6. Reporter les différents points sur la courbe

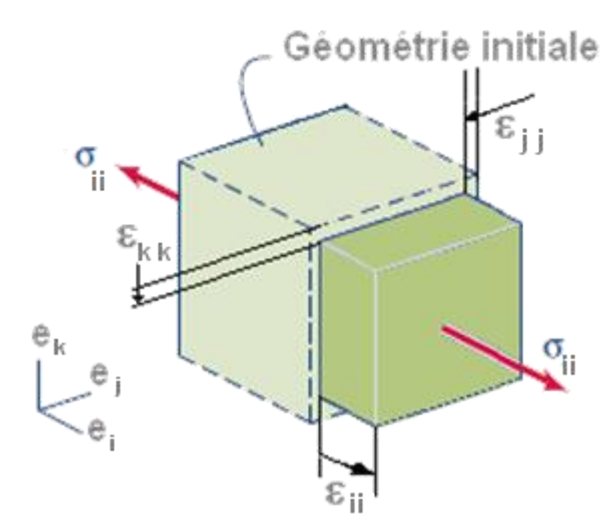


Partie 1

1. NOTION DE CONTRAINTE
2. NOTION DE DÉFORMATION
3. CARACTÉRISATION MÉCANIQUE D'UN MATÉRIAU
4. LOI DE COMPORTEMENT

❑ Cas uniaxial

Ce comportement est modélisé par **la loi de Hooke** (uniaxiale), qui relie déformation et contrainte (quelquesoit la direction $\overrightarrow{e_i}$, cas d'un matériau isotrope)



$$\sigma_{ii} = E\varepsilon_{ii}$$

E est appelé Module de YOUNG, c'est une caractéristique du matériau

Simultanément dans les plans perpendiculaires à $\overrightarrow{e_i}$ se produisent des déformations

$$\varepsilon_{jj} = -\nu\varepsilon_{ii}$$

$$\varepsilon_{kk} = -\nu\varepsilon_{ii}$$

ν est appelé coefficient de Poisson, c'est une caractéristique du matériau

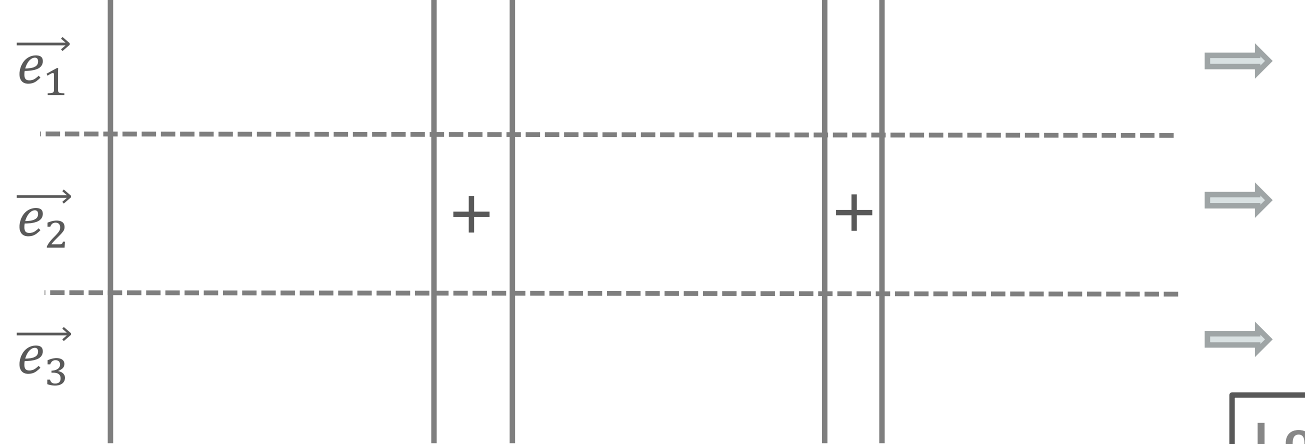


Loi de Hooke généralisée (repère principal)

- Dans le domaine des petites déformations, le comportement du matériau est linéaire
- Si on superpose des contraintes, les déformations induites s'ajoutent
- On généralise ainsi la loi de Hooke à des états de contraintes tridimensionnels en superposant trois contraintes selon trois directions perpendiculaires $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$$

On exprime ainsi les déformations en fonctions des contraintes dans chaque direction $\overrightarrow{e_i}$



Dans le repère principal :

Loi de Hooke généralisée

4.1 Loi de comportement (petites déformations; matériaux isotropes)

Loi de Hooke généralisée (repère principal)

- Dans le domaine des petites déformations, le comportement du matériau est linéaire
- Si on superpose des contraintes, les déformations induites s'ajoutent
- On généralise ainsi la loi de Hooke à des états de contraintes tridimensionnels en superposant trois contraintes selon trois directions perpendiculaires $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$$

On exprime ainsi les déformations en fonctions des contraintes dans chaque direction $\overrightarrow{e_i}$

$\overrightarrow{e_1}$	$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$	$\varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{22}}{E}$	$\varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{E}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$ +	$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E}$ +	$\varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{E}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$	$\varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_{22}}{E}$	$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}$	$\Rightarrow$	$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \nu \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{E}$

Dans le repère principal :

Loi de Hooke généralisée

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{E} - \nu \frac{\sigma_{jj}+\sigma_{kk}}{E}$$



Loi de Hooke généralisée (repère principal)

$$\varepsilon_{ii}=\frac{\sigma_{ii}}{E}-\nu\,\frac{\sigma_{jj}+\sigma_{kk}}{E}\ \xrightarrow{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}\ \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\quad ①$$

Inversion de la loi de Hooke (exemple détermination de σ_{11})

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_{11}}{E}-\nu\,\frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{E}\ \Longrightarrow\ \sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{\nu}\left(\frac{\sigma_{11}}{E}-\varepsilon_{11}\right)\quad ②$$

$$① \Longrightarrow \sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})-\sigma_{11}$$

$$① = ② \Longrightarrow \frac{E}{\nu}\left(\frac{\sigma_{11}}{E}-\varepsilon_{11}\right)=\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})-\sigma_{11}$$

$$\sigma_{11}\left(\frac{1}{\nu}+1\right)=\frac{E}{\nu}\varepsilon_{11}+\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

Loi de Hooke généralisée inversée — **Repère principal**

Calcul identique pour σ_{22}, σ_{33}



Loi de Hooke généralisée (Repère principal) (petites déformations; matériaux isotropes)

$$\varepsilon_{ii}=\frac{(1+\nu)\sigma_{ii}}{E}-\nu\,\frac{\sigma_{ii}+\sigma_{jj}+\sigma_{kk}}{E} \quad ①$$

Inversion de la loi de Hooke

② ⟹ $$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

① & ② ⟹ $$\varepsilon_{ii}=\frac{(1+\nu)\sigma_{ii}}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right)$$

$$\frac{(1+\nu)\sigma_{ii}}{E}=\varepsilon_{ii}+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1+\nu}\,\varepsilon_{ii}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

Loi de Hooke généralisée inversée — **Repère principal**

Par permutation d'indices on détermine $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$



Loi de Hooke généralisée (Repère quelconque)

Loi de Hooke généralisée inversée dans le repère principal (forme matricielle)

$$\begin{bmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{bmatrix}=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\varepsilon_I & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{II} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{III}\end{bmatrix}+\frac{E\nu(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Procédons à un changement de repère caractérisé par la matrice de passage $[P]$

$$^t[P]\begin{bmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{bmatrix}[P]=\frac{E}{1+\nu}\,{}^t[P]\begin{bmatrix}\varepsilon_I & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{II} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{III}\end{bmatrix}[P]+\frac{E\nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underbrace{{}^t[P][Id_3][P]}_{[Id_3]}$$

Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}+\frac{E\nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(les matrices des contraintes et déformations qui décrivent le même état de contrainte ne sont plus diagonales)

Loi de Hooke généralisée inversée (Repère quelconque)

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}$$

De même la Loi de Hooke généralisée

$$\varepsilon_{ij}=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\delta_{ij}$$



4.2 Loi de comportement : Loi généralisée

Loi de Hooke généralisée
(Repère quelconque)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$$

Inversion de la loi de Hooke généralisée inversée
(Repère quelconque)

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij}$$

Que l'on pose aussi $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij}$

Grandeurs caractéristiques des matériaux

μ, λ **coefficients de Lamé**

E **Module de YOUNG**

ν **Coefficient de Poisson**

μ **Module de COULOMB**

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \\ \nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ E = \mu\,\dfrac{3\lambda+2\mu}{\mu+\lambda} \end{cases}$$





Résistance des Matériaux (RdM)

Séance 2

Partie 2 (1/2)

Intervenant:

AU: 2022-2023

PARTIE 2

DÉMARCHE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RdM

ETAPE 1 :

- Schématisation
- Hypothèses de la RdM

ETAPE 2 : RÉSOLUTION PROBLÈME STATIQUE

- Principe fondamental de la statique (PFS)
- Liaisons

ETAPE 3 : DIMENSIONNEMENT

- Eléments de réduction
- Équations d'équilibre en RdM
- Equations d'équilibre d'une section

COMPLÉMENT DE COURS:

- Propriétés de sections



❑ Comment vérifier les critères usuels pour les poutres ?

Scénario: *« Soit une automobile de 1200 Kg qui se déplace sur un pont de 30 m de longueur et 20 tonnes de masse (figure 1). Le véhicule s'arrete brusquement à 10 m du point B»*

❑ Problème de RdM

Le pont risque t'il de fléchir sous l'action du poids du vehicle ?

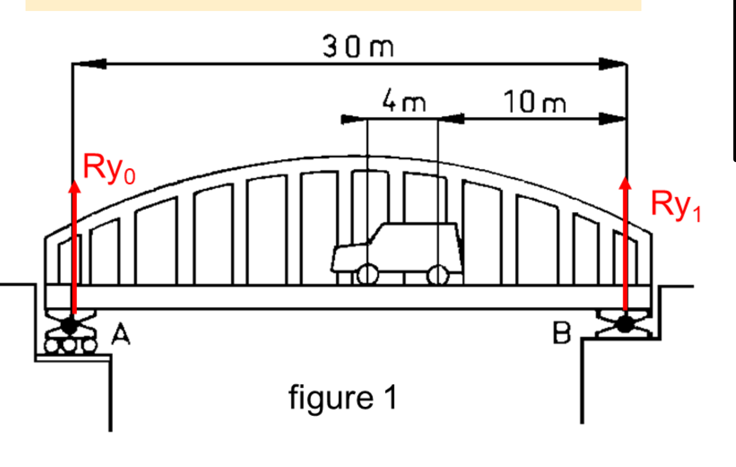
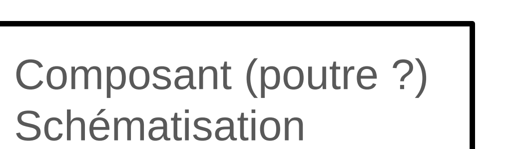
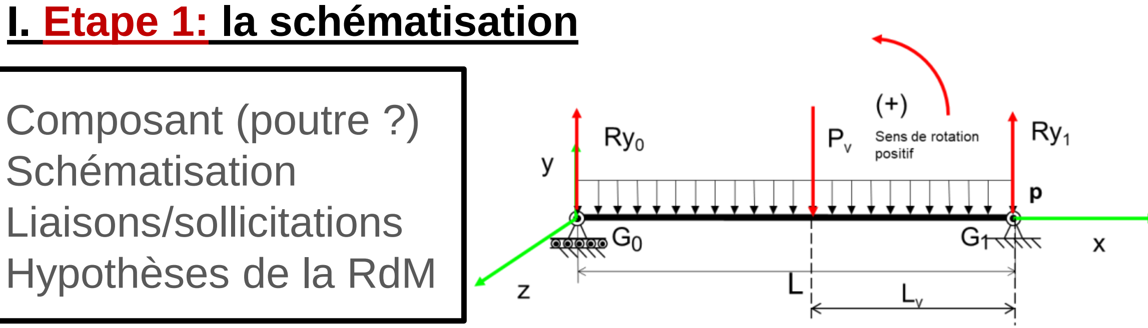


figure 1

❑ La résolution par la RdM se fait en trois étapes

I. Etape 1: la schématisation





II. Etape 2: Résolution du problème statique :

recherche actions "passives"

$$\begin{cases} Ry_0 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L_v)}{L} \\ Ry_1 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L - L_v)}{L} \end{cases}$$

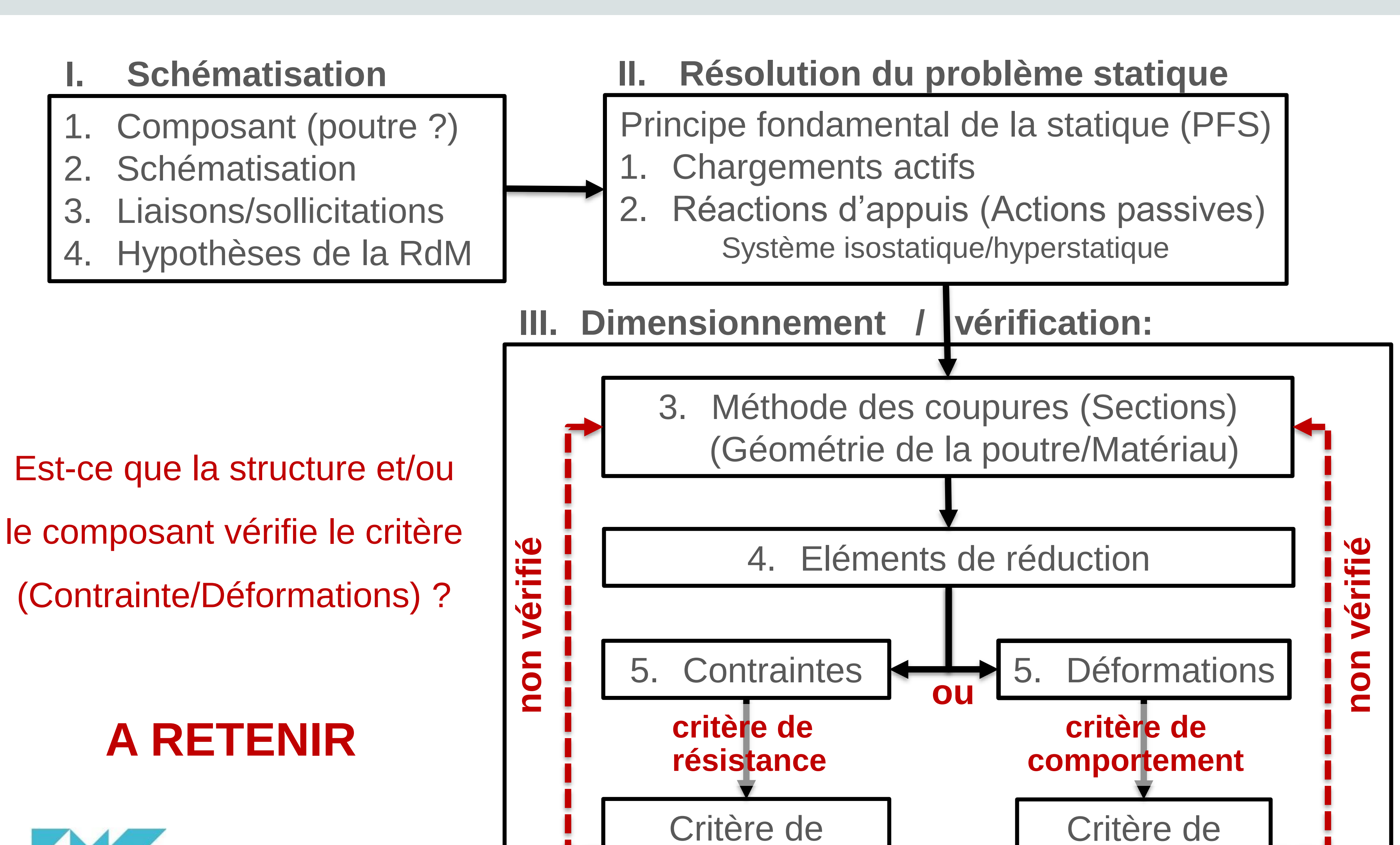
III. Etape 3: Dimensionnement

Vérification de critères en contrainte ou en déformation



2. DÉMARCHE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RdM

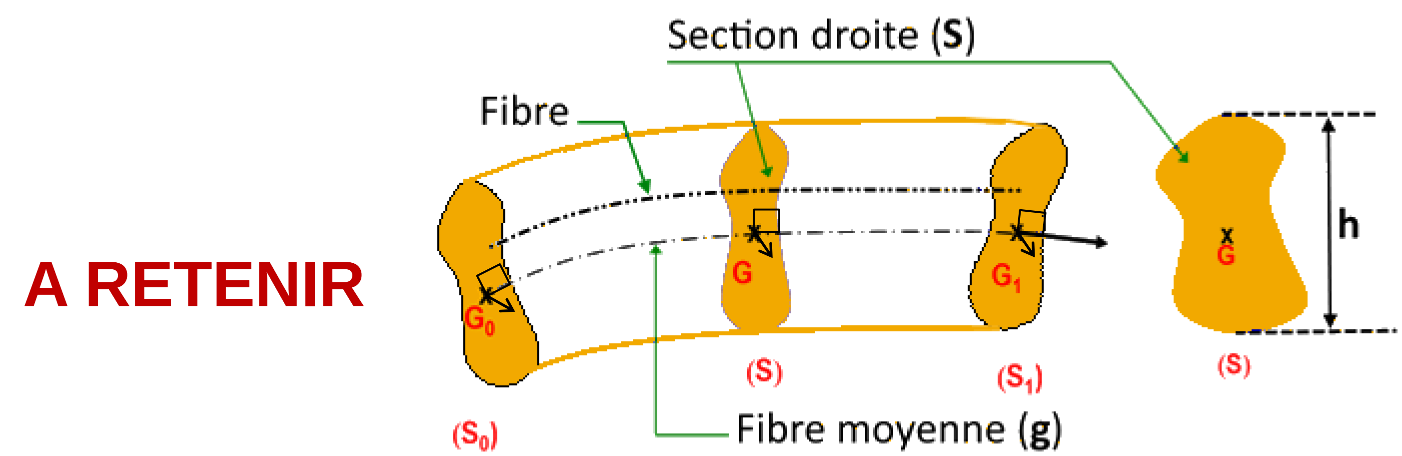
❑ 2.1 Étapes de résolution d'un problème de RdM



❑ Géométrie (Hypothèse 1 de la RdM)

- Les composants étudiés en RdM sont **des poutres**.
- Par définition,
  - Une **poutre** est engendrée par une surface plane **S** nommée **section droite** dont le centre d’inertie (ou barycentre) **G** parcourt une courbe continue **g** appelée **fibre moyenne**;
  - La **section droite** (**S**) reste **perpendiculaire** à la fibre moyenne **g**;
  - Toute courbe parallèle à la courbe moyenne **g** est appelée **fibre**;

A RETENIR





❑ Critères géométriques d'une poutre:

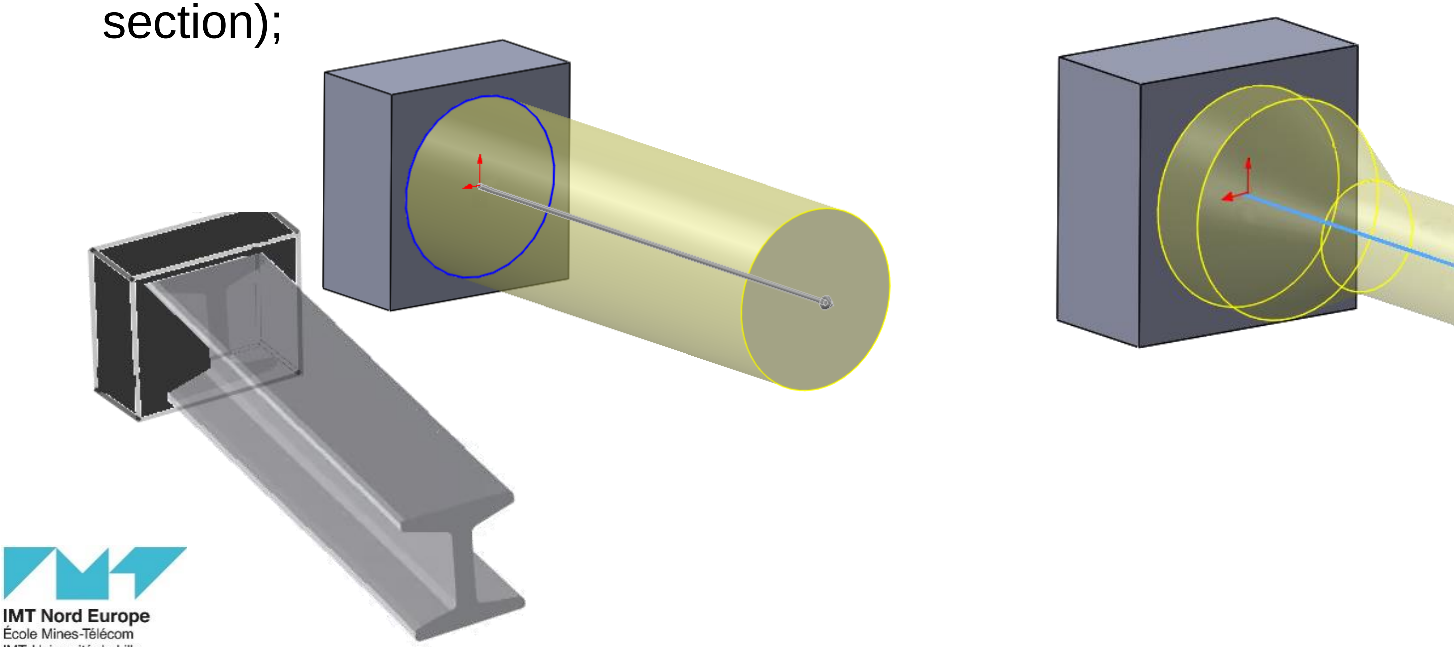
- La **longueur L** de la fibre moyenne doit être suffisamment grande devant la plus grande dimension **h** de la section droite (S):

5h < L< 30h

- Le **rayon de courbure R** en tout point de **g** de la fibre moyenne doit vérifier:

R > 20h

- Les **variations de forme et de dimensions de la section** (**S**) le long de la fibre moyenne **g** doivent être **progressives** (pas de variation brusque de la section);



IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

- **Applications directes**: Identifier le composant en vérifiant qu'il répond aux critères géométriques d'une poutre.

- **Exemple :**

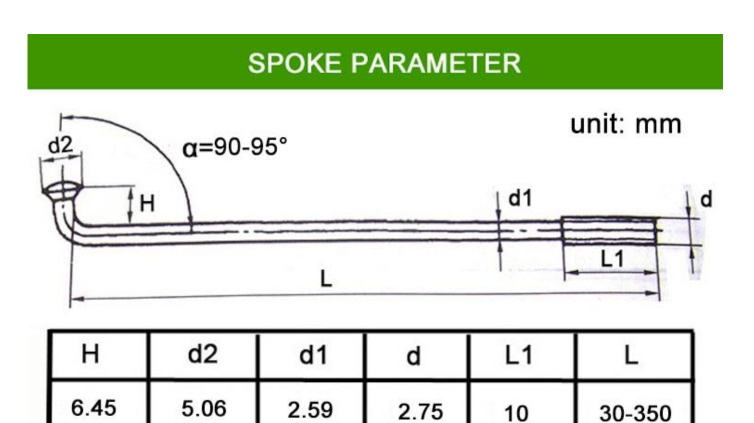






- **Exemple 2:** Rayons et jante d'une roue de vélo





H	d2	d1	d	L1	L
6.45	5.06	2.59	2.75	10	30-350

I. Schématisation

Composant (poutre ?)
1. **Schématisation**
2. Liaisons/sollicitations
3. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème statique

Principe fondamental de la statique (PFS)
1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)

4. Eléments de réduction

5. Contraintes **ou** 5. Déformations

critère de résistance → Critère de limite d'élasticité

critère de comportement → Critère de déformation

non vérifié (retour à 3.)

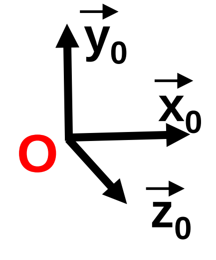
La schématisation d'une poutre se fait toujours **uniquement** par la représentation de sa **fibre moyenne.**

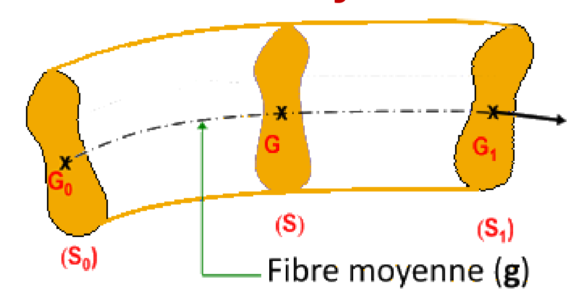


1. **Convention de positionnement du repère global d'étude**:
   a. L'origine **O** du repère est libre (positionnée de façon à minimiser les calculs);
   b. $\overrightarrow{y_0}$ est aligné avec la verticale du lieu et orienté positivement vers le haut;
   c. $\overrightarrow{z_0}$ est horizontal et perpendiculaire au plan qui contient la poutre;
   d. $\overrightarrow{x_0}$ est orienté de telle façon que le repère $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ soit **orthonormé direct.**

2. **La poutre est schématisée uniquement par sa fibre moyenne**







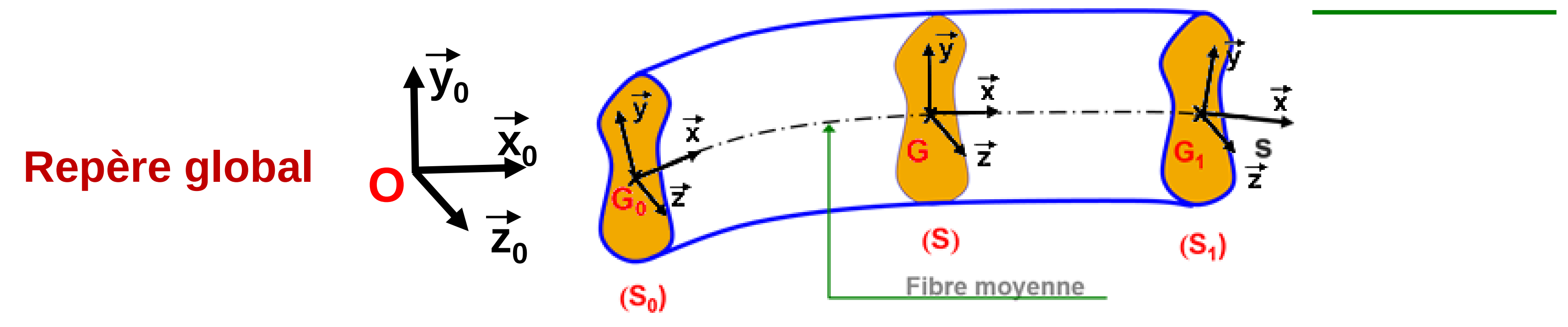
3. **Pour chaque section de la poutre** on associe **un repère local:**
   a. L'origine **G** du repère est confondue avec la fibre moyenne **(g)**;
   b. Les plans $(G_i, \vec{y}, \vec{z})$ appartiennent aux plans des sections **(S)** de la poutre;
   c. $\vec{x}$ est normal aux plans des sections ($\vec{x}$ tangent à la fibre moyenne);
   d. $\vec{y}, \vec{z}$ correspondent aux **axes principaux d'inertie de section**; (cas d'un problème plan: $\vec{z}$ perpendiculaire aux plans $\vec{x}, \vec{y}$ communs au plan qui contient la poutre).



Ce cours traite des problèmes plans :

La fibre moyenne de la poutre sera toujours contenue dans un plan unique

Le plan arbitrairement retenu du repère global sera le plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ ou $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{z_0})$



Les efforts extérieurs (ponctuels ou répartis) sont exclusivement contenus dans le plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ ou $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{z_0})$

Les moments extérieurs s'exercent autour de la direction $\overrightarrow{z_0}$ ou $\overrightarrow{y_0}$

La direction $\vec{z}$ ou $\vec{y}$ des repères principaux des sections de la poutre est confondue avec la direction $\overrightarrow{z_0}$ ou $\overrightarrow{y_0}$ du repère global

Remarque : la sollicitation en torsion sera appliquée sur une géométrie spécifique. La sollicitation extérieure sera un unique moment autour de la direction $\overrightarrow{x_0}$ (cf. Chap torsion)



I. Schématisation

Composant (poutre ?)
1. Schématisation
2. **Liaisons/sollicitations**
3. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème statique

Principe fondamental de la statique (PFS)
1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction
5. Contraintes **ou** 5. Déformations

critère de résistance → Critère de limite d'élasticité

critère de comportement → Critère de déformation

non vérifié → retour à 3.

non vérifié → retour à 3.

Etant donné la **nature plane** des problèmes traités en RdM, trois liaisons sont le plus fréquemment étudiées: liaison encastrement, liaison appui simple, liaison pivot.

A RETENIR



- Chaque liaison d'un solide S_2 avec un solide S_1 est caractérisée par **deux torseurs:**

❑ **Torseur cinématique :**

Il traduit la vitesse relative du solide S_2 par rapport à un autre solide S_1

$${}_{O}\{V_{S2/S1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \vec{V}_{O,S_2/S_1} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} +. V_z\vec{z} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ Avec,

$\vec{\Omega}_{S_2/S_1}$ $\vec{V}_{O,S_2/S_1}$

$\vec{\Omega}_{S_2/S_1}$: vecteur vitesse de rotation

$\vec{V}_{O,S_2/S_1}$: vecteur vitesse du point O appartenant au solide S_2 par rapport au solide S_1

❑ **Torseur statique (Torseur de liaison):**

Il traduit les efforts et moments transmissibles d'un solide S_2 à un autre solide S_1.

$${}_{O}\{\tau_{S2/S1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{S_2/S_1} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{M}_{O,S_2/S_1} = L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$ Avec,

$\vec{F}_{S_1/S_2}$ $\vec{M}_{O,S_1/S_2}$

$\vec{F}_{S_2/S_1}$: Force exercée par S_2 sur S_1.

$\vec{M}_{O,S_2/S_1}$: Moment au point O de S_2 sur S_1.

❑ Liaison encastrement

- **Exemples**

Poutres soudées

S_1

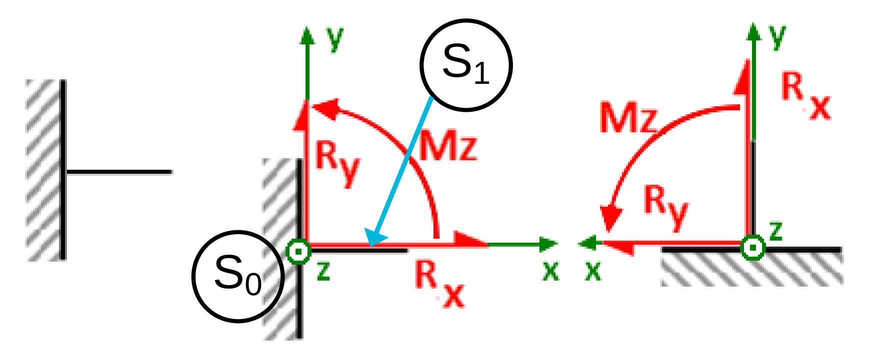
S_0

Assemblage par vissage

S_1

S_0

- **Représentation plane**



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

$$_O\{V_{S0/S1}\} = \left\{ \begin{matrix} \cancel{\omega_x} & V_x = 0 \\ \cancel{\omega_y} & V_y = 0 \\ \omega_z = 0 & \cancel{V_z} \end{matrix} \right\}_O$$

- **Torseur statique**

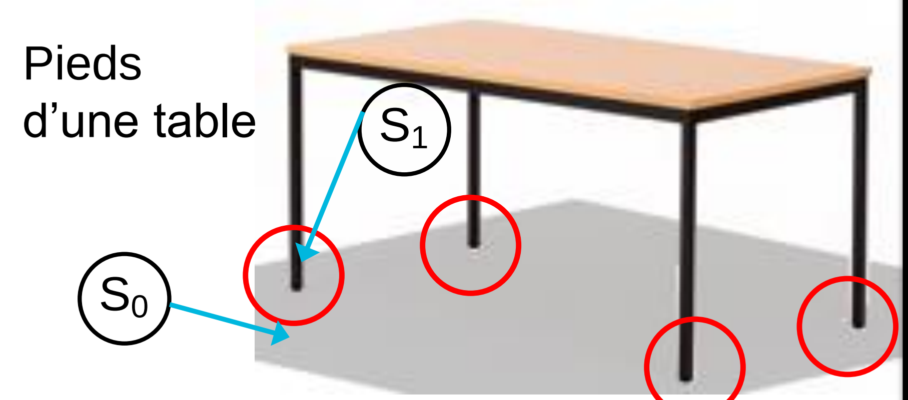
$$_O\{\tau_{S0/S1}\} = \left\{ \begin{matrix} R_x & - \\ R_y & - \\ - & M_z \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

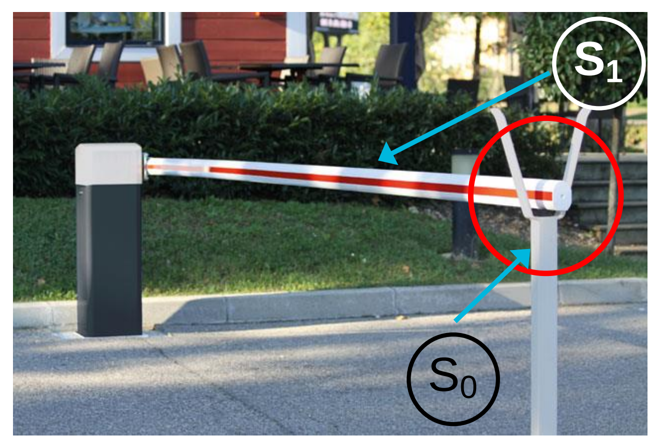
❑ Liaison appui simple (ou ponctuelle)

- **Exemples:**

Pieds d'une table

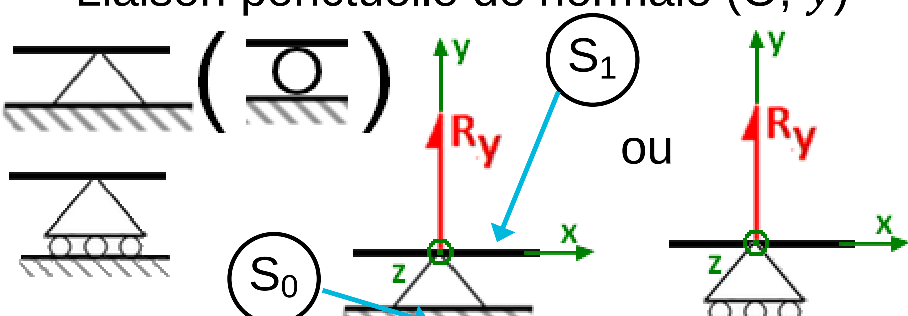


Barrière levante



- **Représentation plane**

Liaison ponctuelle de normale (O, $\vec{y}$)



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

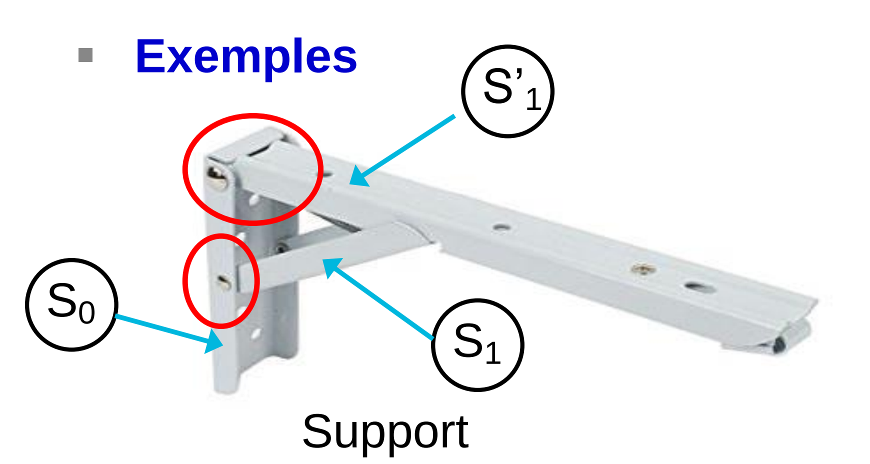
$$_O\{V_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} \cancel{\omega_x} & V_x \\ \cancel{\omega_y} & V_y = 0 \\ \omega_z & \cancel{V_z} \end{Bmatrix}_O$$

- **Torseur statique**

$$_O\{\tau_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} R_x = 0 & - \\ R_y & - \\ - & M_z = 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

❑ Liaison pivot

- **Exemples**

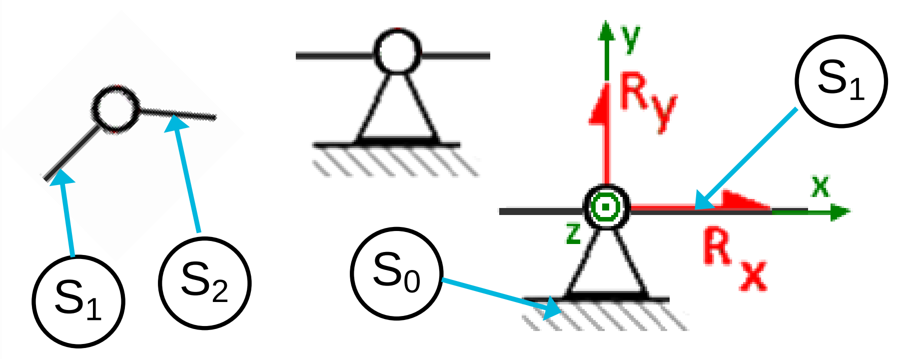


Support



Domaine du génie civil: les ponts

- **Représentation plane d'axe (O, $\vec{z}$)**



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

$$ {}_O\{V_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} \cancel{\omega_x} & V_x = 0 \\ \cancel{\omega_y} & V_y = 0 \\ \omega_z & \cancel{V_z} \end{Bmatrix}_O $$

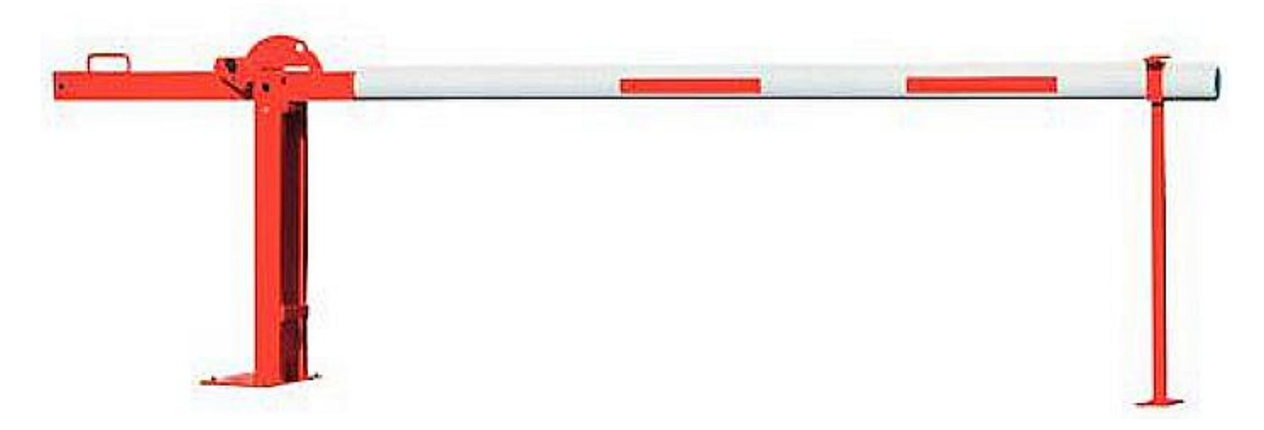
- **Torseur statique**

$$ {}_O\{\tau_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} R_x & - \\ R_y & - \\ - & M_z = 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} $$



❑ Application directe:

Système barrière levante pivotante



1. Numéroter les pièces de ce mécanisme qui peuvent être pré-dimensionnées par la théorie des poutres.
2. Schématiser chaque pièce identifiée et représenter le chargement qui s'applique sur chacune d'elles.



1. Numéroter les pièces de ce mécanisme qui peuvent être pré-dimensionnées par la théorie des poutres.

   - **3 poutres:**

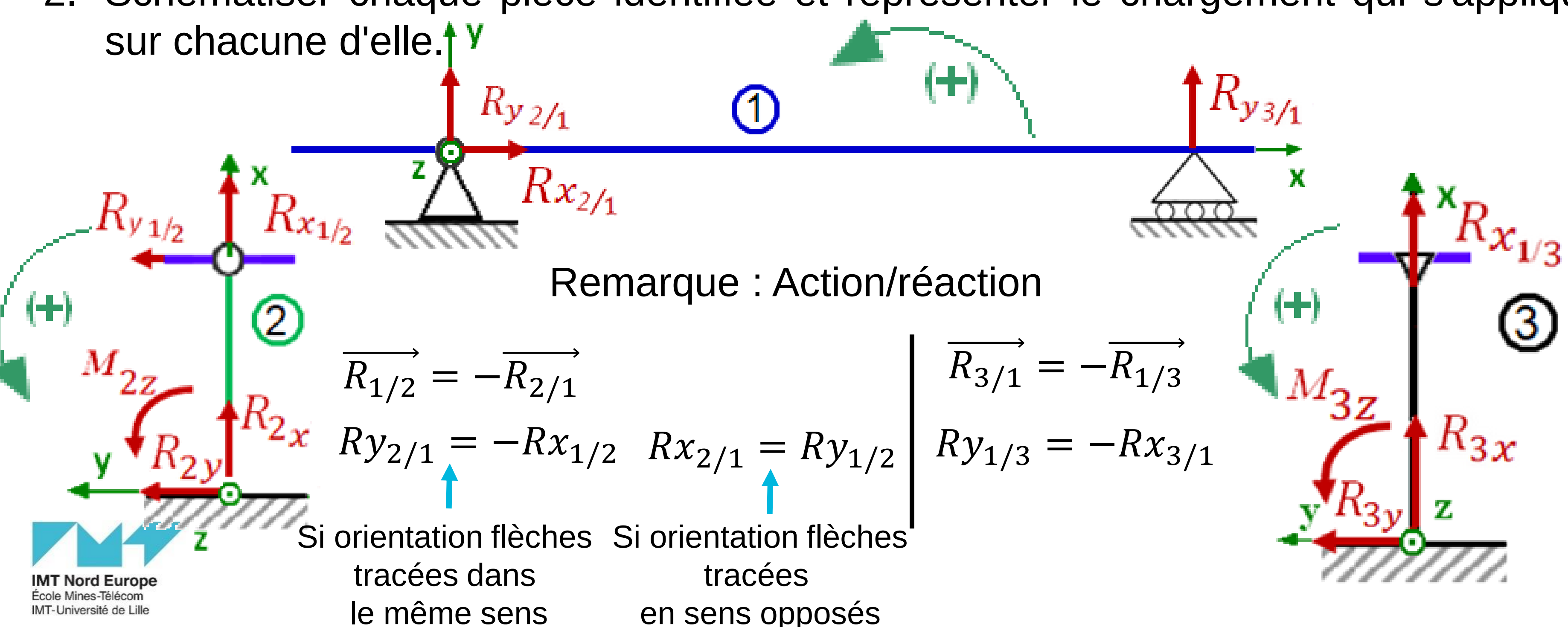
Repère global

pivot

encastrement encastrement

appui simple

2. Schématiser chaque pièce identifiée et représenter le chargement qui s'applique sur chacune d'elle.



Remarque : Action/réaction

$\overrightarrow{R_{1/2}} = -\overrightarrow{R_{2/1}}$

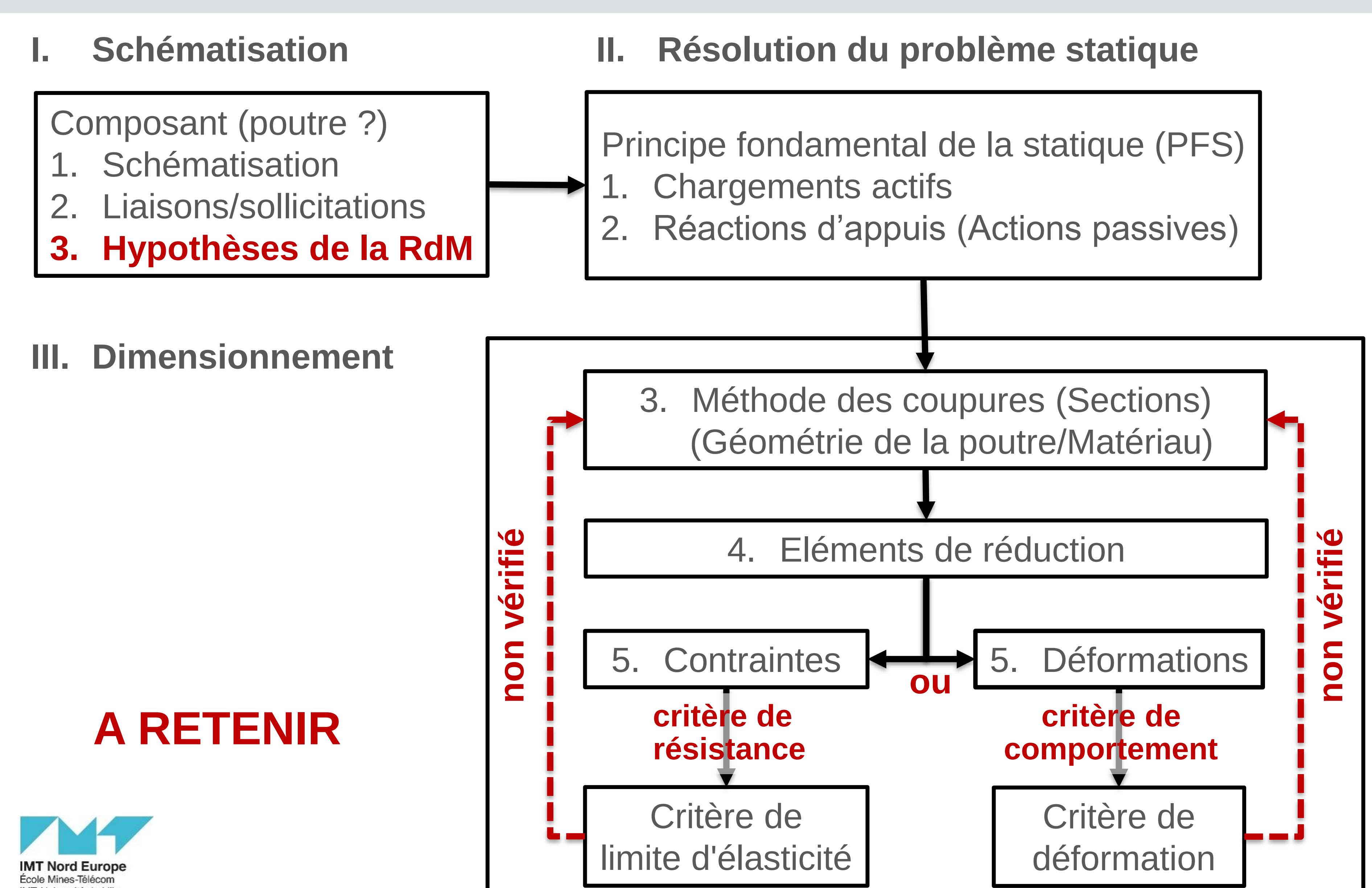
$Ry_{2/1} = -Rx_{1/2}$ $\quad$ $Rx_{2/1} = Ry_{1/2}$

$\overrightarrow{R_{3/1}} = -\overrightarrow{R_{1/3}}$

$Ry_{1/3} = -Rx_{3/1}$

Si orientation flèches tracées dans le même sens

Si orientation flèches tracées en sens opposés



I. Schématisation
II. Résolution du problème statique
Composant (poutre ?)
1. Schématisation
2. Liaisons/sollicitations
3. Hypothèses de la RdM
Principe fondamental de la statique (PFS)
1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)
III. Dimensionnement
3. Méthode des coupures (Sections)
(Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction
5. Contraintes
ou
5. Déformations
critère de résistance
critère de comportement
Critère de limite d'élasticité
Critère de déformation
non vérifié
non vérifié
A RETENIR
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

Rappel

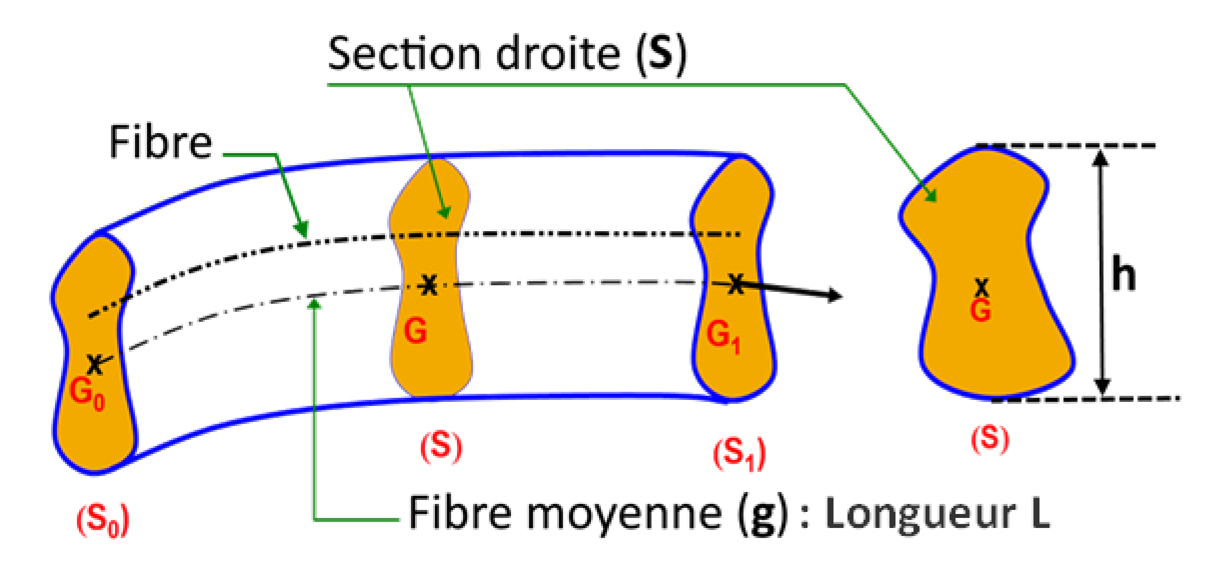
La **théorie de la RdM** peut être considérée comme une **simplification de la théorie mécanique des milieux continus**, **à condition** que **certaines exigences** sur la géométrie, les chargements et des zones de validité de calcul soient assurées, **on peut garantir que les résultats trouvés sont corrects.**

Il est donc important de les connaitre, elles sont de 2 types :
Soit **des hypothèses simplificatrices** ont été posées pour réaliser les calculs.
Soit **des hypothèses qui doivent être vérifiées avant tout calcul** pour s'assurer que les résultats seront corrects.
Le risque en cas de non-respect, est d'aboutir à une conception mal dimensionnée entrainant des risques d'endommagements irréversibles ou de défaillances.

Ces conditions sont appelées **les hypothèses de la RdM**, elles sont au **nombre de 10.**



Hypothèse 1 : Critères géométriques que doit respecter une poutre. (Voir Slide 12).



- La **longueur L** de la fibre moyenne doit être suffisamment grande devant la plus grande dimension **h** de la section droite (S): **5h < L< 30h**
- Le **rayon de courbure R** en tout point de **g** de la fibre moyenne doit vérifier:

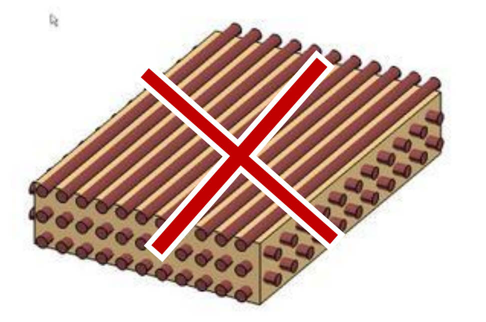
R > 20h

- Les **variations de forme et de dimensions de la section** (**S**) le long de la fibre moyenne **g** doivent être **progressives** (pas de variation brusque de la section).

Hypothèse 2 : Homogénéité et isotropie des matériaux

- Cette hypothèse porte sur la nature des matériaux qui constituent les poutres.
- **Matériaux homogènes**: c'est à dire qu'ils **ont les mêmes propriétés physiques en tout point du solide.**
- **Matériaux isotropes**: c'est à dire qu'ils **n'ont pas de direction privilégiée en contrainte ou en déformation**, le matériau réagit de la même façon aux sollicitations quelque soit la direction envisagée. C'est le cas de la plupart des matériaux métalliques, des bétons et des polymères. Par contre des **matériaux fibrés** comme le bois ou les composites ne sont pas isotropes.





Hypothèse 3 : Comportement élastique linéaire

- Les déformations des matériaux sont proportionnelles aux chargements appliqués: Elles s'annulent lorsque le chargement est supprimé;
- Ce comportement est caractérisé par **la loi de HOOKE généralisée** qui établie les relations contraintes-déformations;
- Pour déterminer cette loi (qui caractérise le comportement du matériau), on réalise un essai de traction normalisé.

Hypothèse 4 : Action statique des forces

- Les chargements extérieurs considérés sont appliqués de façon lente, continue et progressive et ceci depuis une valeur nulle jusqu'à leurs intensités maximales de sorte que les déformations se produisent à vitesse nulle.
- La poutre reste en équilibre quasi-statique, il n'y a pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

Hypothèse 5 : Conservation des dimensions initiales

- **Lorsqu'on détermine les chargements** (équilibre de tout ou partie de la structure), la **structure est considérée solide rigide donc non déformée**, c'est-à-dire que **toutes les longueurs et angles** qui décrivent la structure **restent constants.**

Conséquences

- Les dimensions qui interviennent dans les équations d'équilibre sont celles de la structure avant application des charges.
- **Les équations de la statique** pour décrire l'équilibre global d'une structure seront **écrites sur la structure non déformée**.



3. HYPOTHÈSES DE LA RdM

3.3 Hypothèses de la RdM

Hypothèse 6 : Hypothèse 1 de Barré de Saint Venant

Les contraintes et les déformations dans une **zone (I)** d'un solide **suffisamment éloignée** des zones d'application des sollicitations extérieures (II, III) **ne dépendent que des forces et moments résultants de ces sollicitations, et pas de leur mode d'application.**

$[F_e]_{II} \; \begin{Bmatrix} X_{II} & L_{II} \\ Y_{II} & M_{II} \\ Z_{II} & N_{II} \end{Bmatrix}_{GII\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Zone II — Zone I — Zone III

$[F_e]_{III} \; \begin{Bmatrix} X_{III} & L_{III} \\ Y_{III} & M_{III} \\ Z_{III} & N_{III} \end{Bmatrix}_{I\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

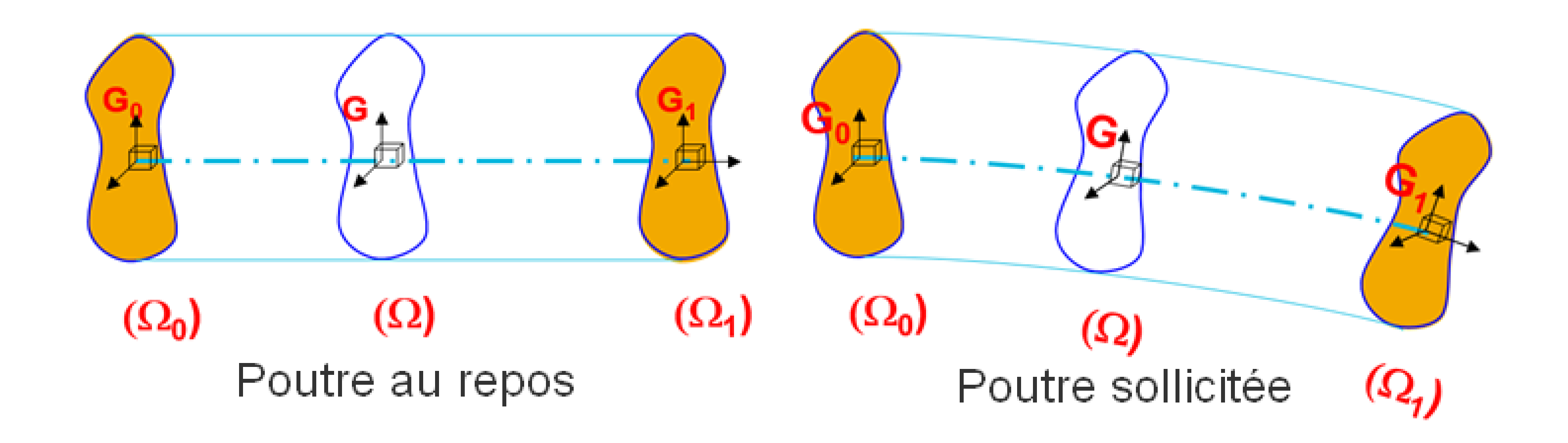
Les forces et moments en zone I résultants des chargements extérieurs appliqués sur les zones II et III sont **indépendants de la façon dont ces chargements sont appliqués** sur ces zones II et III.



Hypothèse 7 : Hypothèse de Navier Bernouilli

Toute section **plane avant déformation** se transforme en une section **plane après déformation**.

Toutes **les sections (Ω) qui constituent la poutre restent perpendiculaires à la fibre moyenne** après déformation.



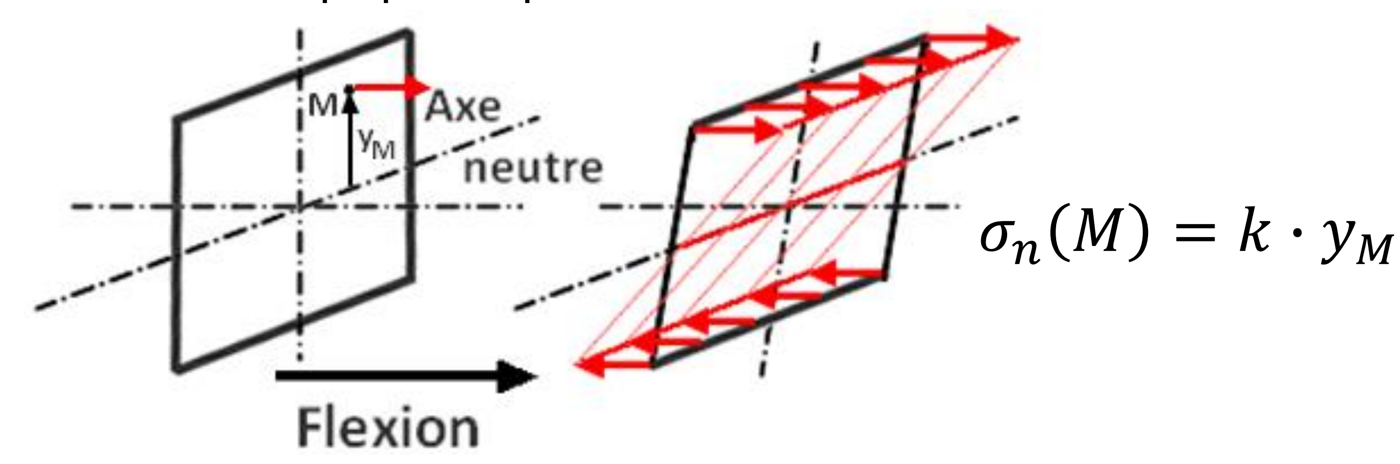


Hypothèse 8 : Hypothèse de continuité des modèles

Les différentes équations qui décrivent les déplacements, les contraintes et les déformations sont des fonctions mathématiques continues et dérivables.

Hypothèse 9 : Hypothèse 2 de Barré de Saint Venant (pour le cas de la flexion simple)

On considère que la contrainte normale en tout point M d'une section droite d'une poutre fléchie en **flexion simple**, est proportionnelle à la distance qui le sépare de l'axe neutre, axe qui passe par le centre d'inertie de la section.



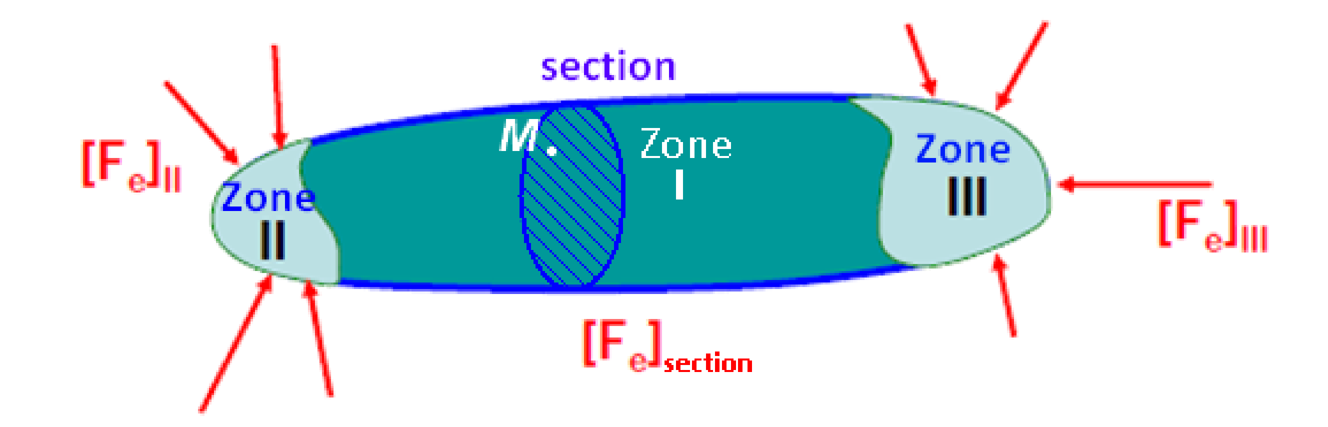
$$\sigma_n(M) = k \cdot y_M$$



Hypothèse 10 : Problème de Barré de Saint Venant

On admet en RdM, que dans toute pièce prismatique (poutre), les contraintes et les déformations produites en tout point M par un système de forces appliquées, ne dépendent que des **éléments de réduction** dûs à ce système de forces, c'est-à-dire de **sa résultante** et de **son moment résultant** dans la section qui contient le point M.

Cette proposition n'est toutefois **valable que pour des points suffisamment éloignés des zones d'application des charges** (région 1).



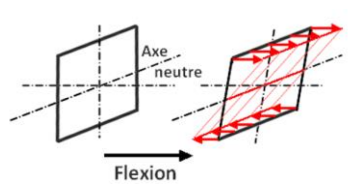


❑ Récapitulatif des hypothèses de la RdM

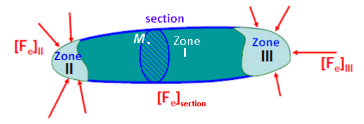
- Hypothèse 1 : Hypothèse géométrique $5h<L<30h$, $R_{courbure}>20h$
- Hypothèse 2 : Homogénéité et isotropie des matériaux
- Hypothèse 3 : Comportement élastique linéaire
- Hypothèse 4 : Action statique des forces
- Hypothèse 5 : Conservation des dimensions initiales (détermination chargement)
- Hypothèse 6 : Hypothèse de Barré de Saint Venant
- Hypothèse 7 : Hypothèse de Navier Bernouilli



- Hypothèse 8 : Hypothèse de continuité des modèles f’, f’’ continues
- Hypothèse 9 : Hypothèse Barré de Saint Venant (flexion)



- Hypothèse 10 : Problème de Barré de Saint Venant





I. Schématisation

1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème statique

Principe fondamental de la statique (PFS)

1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

5. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
5. Eléments de réduction / cohésion
5. Contraintes ou 5. Déformations

critère de résistance → Critère de limite d'élasticité

critère de comportement → Critère de déformation

non vérifié

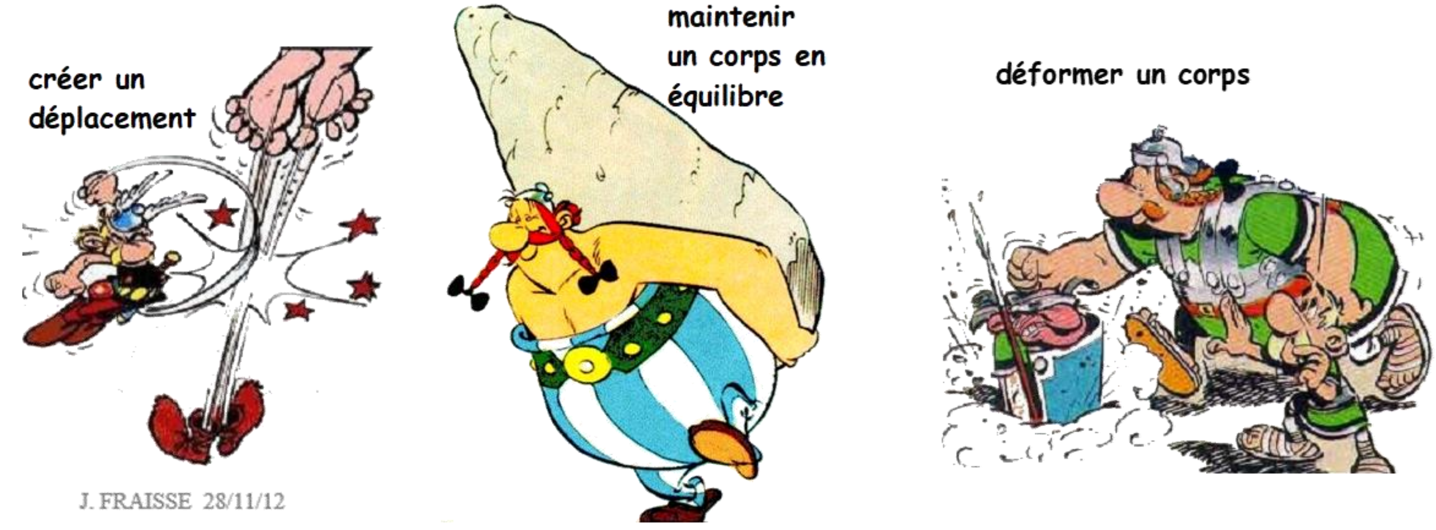
non vérifié

Cette partie a pour objectif, de rappeler les principes du calcul statique nécessaires à l'identification complète du chargement qui s'applique à un élément poutre.



Le chargement se traduit par des **actions mécaniques (A.M)**.

Une A.M. est un phénomène physique capable de :



On distingue 2 types d'A.M.:

- Les **A.M. à distance** (ex : champs de pesanteur, champs magnétiques, champs électrostatiques (matériaux électro-actifs : quartz)).
- Les **A.M. de contact** linéiques ou surfaciques, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leurs surfaces en contact.

❑ Actions mécaniques assimilables à des forces

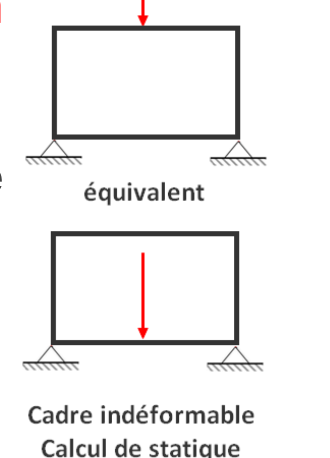
- Le poids d'un solide (force appliquée en son centre de gravité);
- La force de pression (force équivalente à la résultante des pressions qui s'exercent sur une courbe/surface appliquée en son centre géométrique);
- Force élastique (ex: force exercée par un ressort proportionnelle à son allongement);

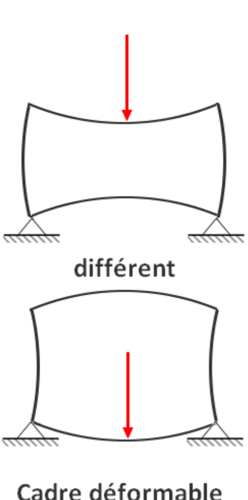
❑ Une force est un glisseur :

La force est complètement définie par un vecteur $\vec{F}$ et un point P (en général point d'application de la force).

❑ En statique, la force peut être déplacée sur son support la droite (D) sans aucune incidence.

❑ Attention non applicable lors de l'établissement de l'équilibre en RdM.







- **Identification d'une force par un torseur:**

  L'A.M que crée une force $\vec{F}$ appliquée en un point P d'un corps est équivalente à L'A.M que crée la même force $\vec{F}$ appliquée en tout autre point A de ce même corps, à laquelle on ajoute le moment généré par cette force $\vec{F}$ au point A.

- On modélise de façon générale une force à l'aide d'un **torseur : on l'exprime avec 2 vecteurs**: le vecteur force, et le vecteur du moment de cette force calculé en un point A (si A est le point d'application de la force $\overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0}$)

$$_A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{1\to 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{\mathcal{F}}_{1\to 2}) \end{Bmatrix}_A \qquad _A\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} F_x & L \\ F_y & M \\ F_z & N \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x}\;\;\vec{y}\;\;\vec{z})}$$

- **Transport d'un torseur** : Définir en un point B, l'incidence d'une force (torseur) exercée initialement en un point A

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{\mathcal{F}}_{1\to 2}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{\mathcal{F}}_{1\to 2}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathcal{F}}_{1\to 2}$$

$$_B\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{1\to 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{\mathcal{F}}_{1\to 2}) \end{Bmatrix}_B$$

← Résultante: invariante

← Moment: dépend du point B



4.5 Chargement actif et Chargement réactif (passif)

Le chargement qui s'exerce sur une structure se décompose en :

❑ **Eléments de chargement actif**

- Ils s'expriment sous la forme de forces, moments, charges linéiques, ou charges à distance (telles le poids, les forces électrostatiques).
- Ils peuvent s'appliquer directement sur la structure ou par l'intermédiaire des liaisons qui relient la structure à son environnement.
- **Ils correspondent aux données d'entrée connues du problème.**

❑ **Eléments de chargement réactif (passif)**

- Ils sont appliqués à la structure à travers les liaisons qui relient la structure à son environnement, ils "s'adaptent" au chargement actif.
- **ce sont les inconnues du problème.**



Quelques rappels de règles pour faciliter les calculs :

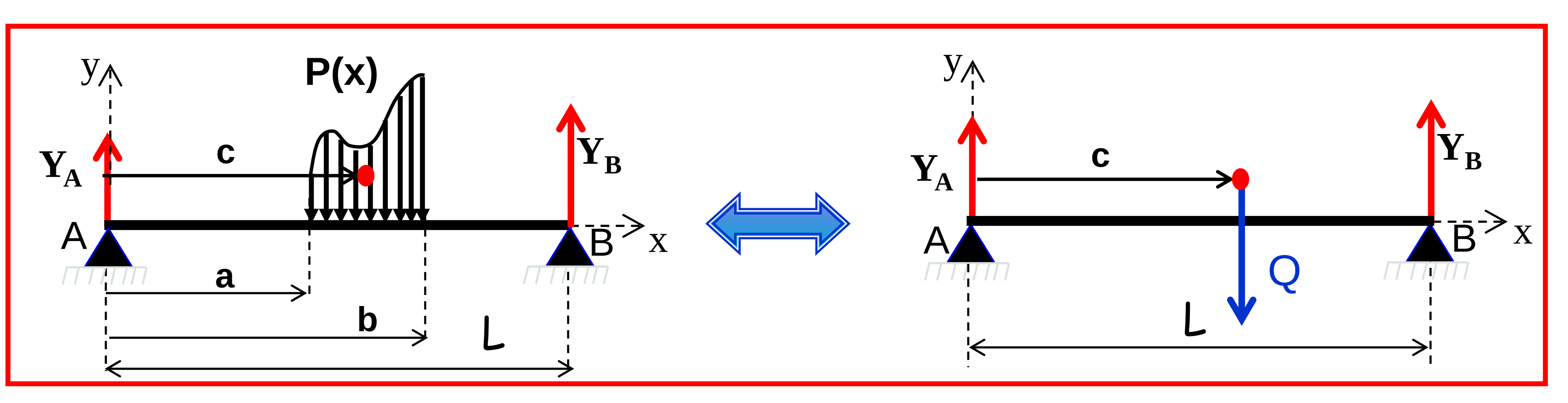
Equilibre des moments

•Pour un système en équilibre statique, si le **moment des forces est nul par rapport à un point A**, ce **moment sera nul par rapport à tout autre point** de l'espace. Donc le choix du point par rapport auquel on calcule le moment est libre.

• Le choix de ce point est guidé par la simplicité des relations obtenues.

Remplacement charges réparties par charge concentrée

Dans ce cas d'une étude statique (et **seulement pour l'étude statique**), toutes charges réparties, peuvent être remplacées par sa résultante appliquée au centre de gravité du diagramme de répartition de la charge.

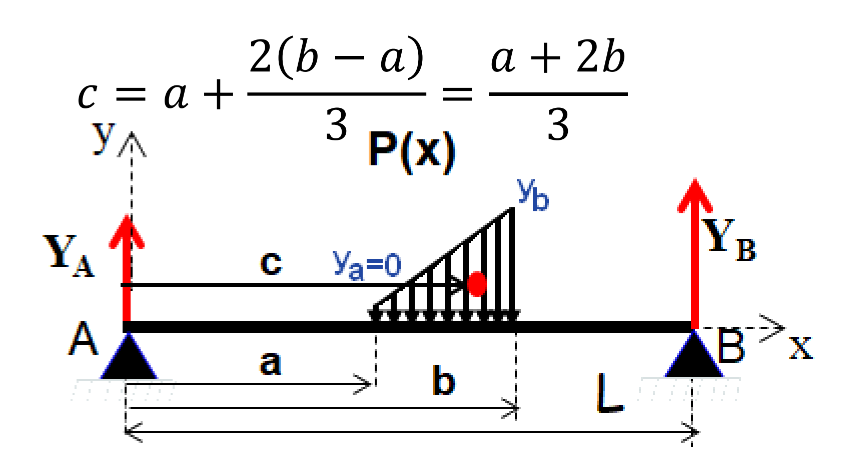




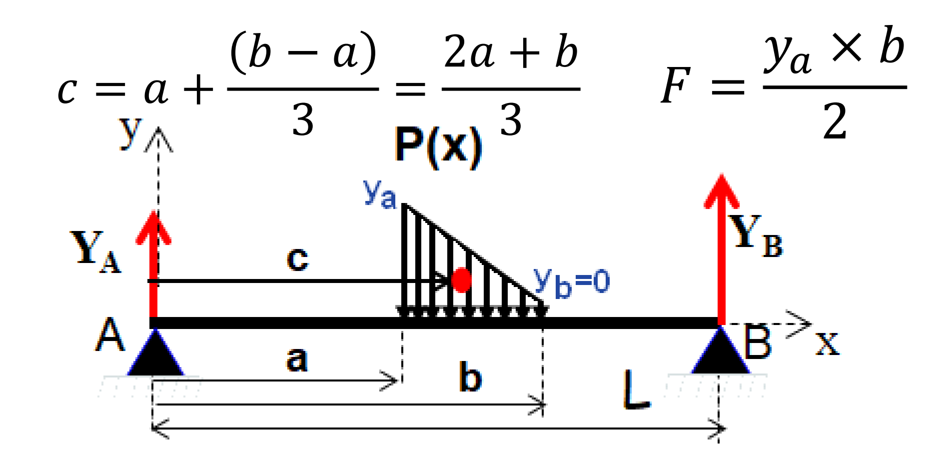
Remplacement charges réparties par charge F concentrée

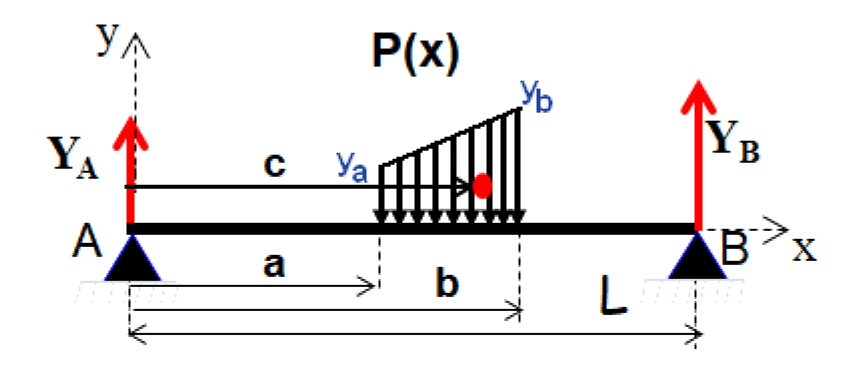
Quelques cas de chargement

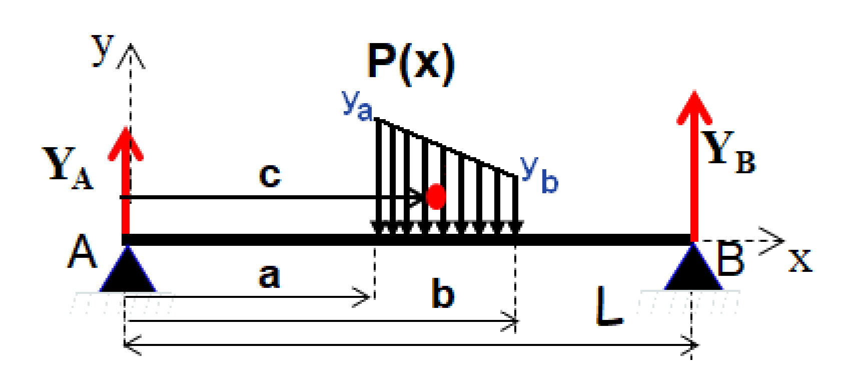
$$c = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3}$$



$$c = a + \frac{(b-a)}{3} = \frac{2a+b}{3} \qquad F = \frac{y_a \times b}{2}$$



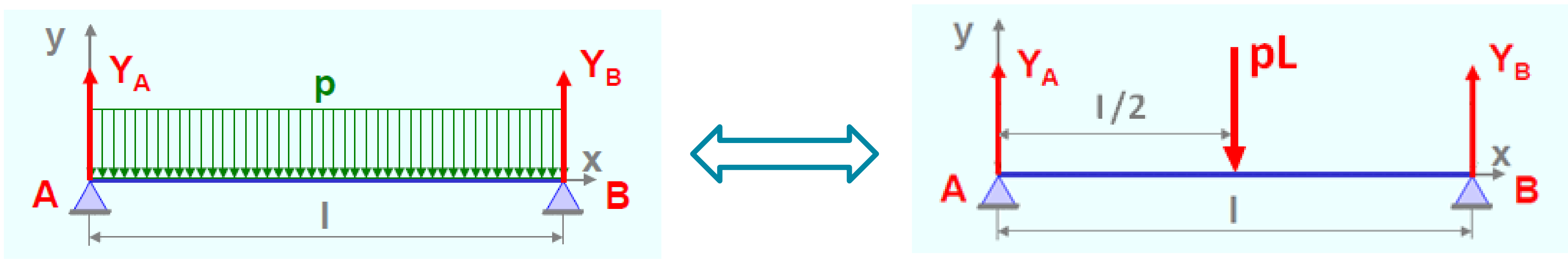




$$c = a + (b-a)\frac{y_a + 2y_b}{3(y_a + y_b)} \qquad F = \frac{(y_a + y_b) \times b}{2}$$



Exemple 1 : Une poutre AB de longueur l supporte une charge uniformément répartie p sur toute sa longueur, et repose sur deux appuis simples.
Déterminer les réactions d'appui en A et B.



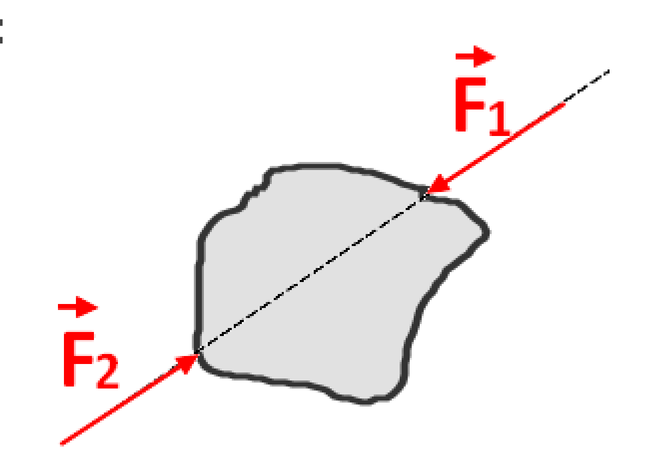
Solution:

PFS

$$\begin{cases} \mathit{Projection}\ \text{des forces}\ \mathit{sur}\ Ax: & 0 = 0 \\ \mathit{Projection}\ \text{des forces}\ \mathit{sur}\ Ay: & Y_A + Y_B - pl = 0 \\ \mathit{Projection\ des\ moments\ en\ A\ sur\ Az} & Y_B l + \int_0^l x(-p)dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A = \dfrac{pl}{2} \\ Y_B = \dfrac{pl}{2} \end{cases}$$

Quelques rappels de règles pour faciliter les calculs :

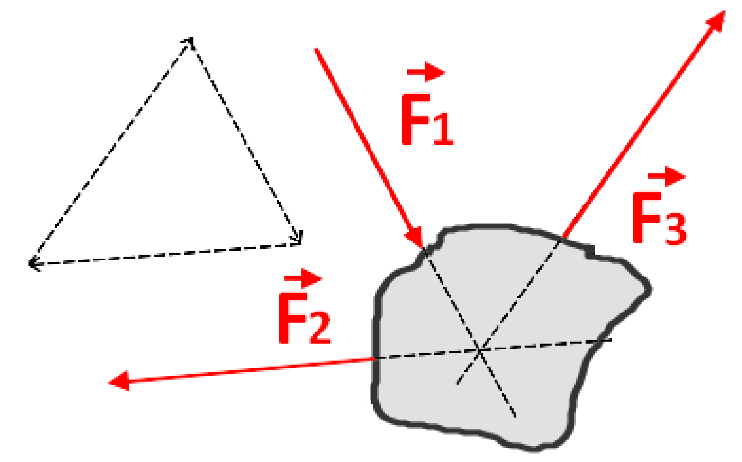


Si un solide est en équilibre sous l'action de:

deux forces, $\overrightarrow{F1}$, $\overrightarrow{F2}$, ces forces ont la même ligne d'action, ont deux sens opposés et ont une même intensité .

Si un solide est en équilibre sous l'action de:

trois forces, $\overrightarrow{F1}$, $\overrightarrow{F2}$, $\overrightarrow{F3}$, non parallèles, les lignes d'action de ces forces se coupent en un même point, leur somme vectorielle est nulle.





- **Rappel : hypothèse 4 de la RdM « action statique des forces »**

Les chargements extérieurs sont considérés s'appliquer de façon lente, continue et progressive et ceci depuis une valeur nulle jusqu'à leurs intensités maximales.

(La poutre reste en équilibre quasi statique)

On peut donc appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) pour étudier l'équilibre de la structure, et déterminer les forces et les moments extérieurs qui s'appliquent à la structure.

L'équilibre du système se traduit par le Principe Fondamental de la Statique :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \text{« torseur des actions extérieures» = « torseur nul »}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} {}_{O}\begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$



4.6 Équations d'équilibre du PFS (problèmes plans)

Étant donnée **la nature plane** des problèmes à résoudre, l'équilibre du **système étudié isolé** se réduit à un système de trois équations, extraites de l'équation torsorielle générale du PFS:

« torseurs Chgt actif»+« torseurs Chgt réactif» = « torseur nul »

Dans repère global $(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{z_0})$

$$\sum_{i=1}^{i=n} {}_O\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ 0 & N_i \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})} + \sum_{j=1}^{j=m} {}_O\begin{Bmatrix} X_j & 0 \\ Y_j & 0 \\ 0 & N_j \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} X_i\ (proj/X) \\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i\ (proj/Y) \\ \sum_{i=1}^{i=n} N_i\ (Mt(O)/Z) \end{cases}$$

Chgt actif

Chargement extérieur connu qui s'applique sur le système isolé

Chgt réactif

Réactions de Liaisons du système isolé qui sont inconnues

problèmes plans
3 équations d'équilibre

Quelques rappels de règles pour faciliter les calculs :

Système isostatique / Système hyperstatique:

Lorsque le **problème de statique à résoudre est plan**, l'équilibre du système se réduit à un système de **trois équations**, extraites de l'équation torsorielle générale (**PFS**)..

$$O\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} X_i \ (proj/X) \\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \ (proj/Y) \\ \sum_{i=1}^{i=n} N_i \ (Mt(O)/Z) \end{cases}$$

La Résolution du problème statique dépend du nombre d'inconnues introduites par les réactions de liaisons :

- moins de 3 inconnues: le problème est dit **hypostatique**. L'équilibre statique est en général impossible, sauf si les forces connues satisfont à certaines conditions.

– **3 inconnues :** le problème est dit **isostatique** ou statiquement défini.

– **plus de 3 inconnues** : le problème est dit **hyperstatique**, il est mathématiquement indéterminé. Pour pouvoir être résolu, il faut autant d'équations supplémentaires qu'il y a d'inconnues surabondantes (>3). L'étude des déformations permet d'écrire les équations manquantes, ce qui lèvera l'indétermination.



L'étude de l'isostatisme des mécanismes fait l'objet d'études plus poussées.

I. Schématisation

1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème (statique)

Principe fondamental de la statique (PFS)
1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)

3. Eléments de réduction / cohésion

5. Contraintes — **ou** — 5. Déformations

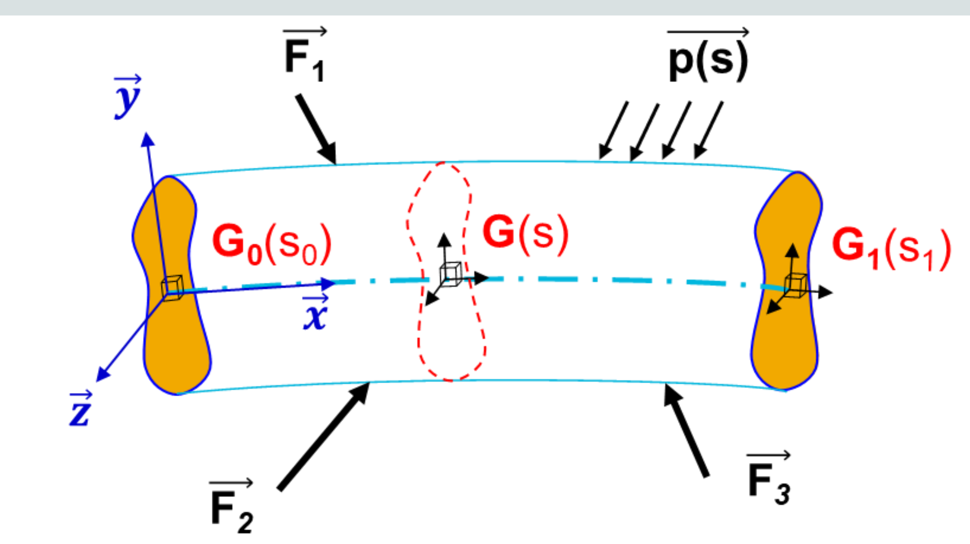
critère de résistance → Critère de limite d'élasticité

critère de comportement → Critère de déformation

non vérifié

non vérifié





Soient:

- Une poutre de fibre moyenne (**g**) en équilibre statique sous l'action des forces extérieures $\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_3}\ et\ \overrightarrow{p(s)}$.
- **G** le centre d'inertie d'une section droite **S** de la poutre.

⇒ Par application du **Principe Fondamental de la Statique (P.F.S)** au point **G:**

$$\left\{\mathcal{T}_{F_{ext/g}}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

Projection ⇒

- Effort normal: projection / (G, $\vec{x}$)

$$\overrightarrow{F_{1x}} + \overrightarrow{F_{2x}} + \overrightarrow{F_{3x}} + \overrightarrow{P_x} = \vec{0}$$

- Effort tranchant: projection / (G, $\vec{y}$)

$$\overrightarrow{F_{1y}} + \overrightarrow{F_{2y}} + \overrightarrow{F_{3y}} + \overrightarrow{P_y} = \vec{0}$$

- Moment flexion: rotation / (G, $\vec{z}$)

$$\overrightarrow{M}_{\overrightarrow{F_1}/G} + \overrightarrow{M}_{\overrightarrow{F_2}/G} + \overrightarrow{M}_{\overrightarrow{F_3}/G} + \overrightarrow{M}_{\vec{P}/G}$$

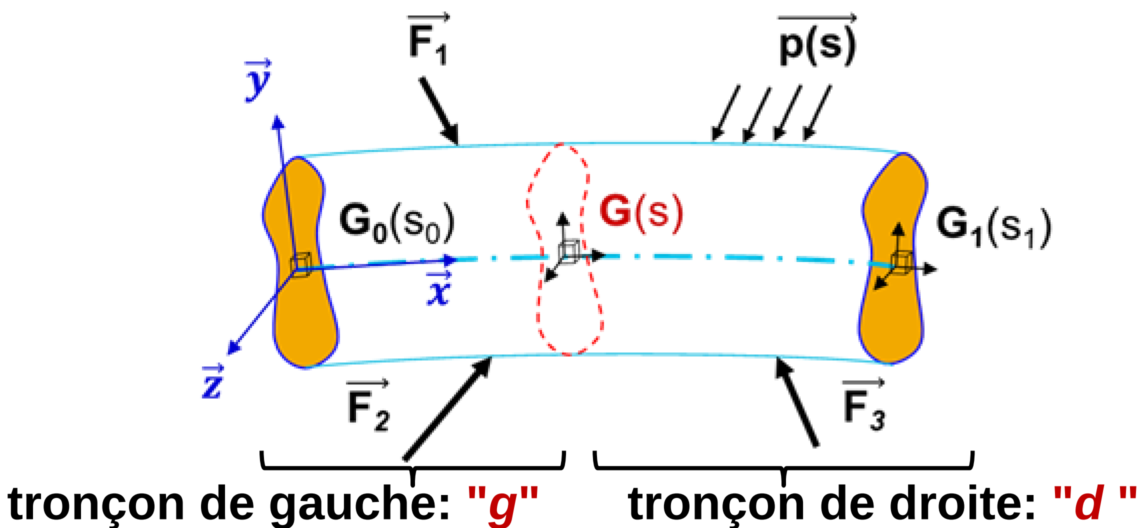


5. Équations d'équilibre en RdM

5.3 Notion de coupe fictive (tronçons)

Pour évaluer la résistance de la poutre aux efforts extérieurs $\overrightarrow{F_{ext}}$, il faut connaitre la répartition des **efforts intérieurs** (dans le matériau).

- Soit une **coupe fictive** selon une section de la poutre de centre **G situé sur** fibre moyenne **(g)** et d'abscisse curviligne (s)
- La poutre est ainsi décomposée en deux tronçons:
  - Un tronçon dit le **tronçon de gauche** (noté **"*g*"**) , défini par la partie $\mathbf{G_0G}$;
  - Un tronçon dit le **tronçon de droite** (noté **"*d* "**) , défini par la partie $\mathbf{GG_1}$;



5.4 Torseur des éléments de réduction/ Torseur des éléments de cohésion

- Par convention (dans le cadre de ce cours):
  - Le **Torseur des éléments de réduction** ${}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}$ caractérise le **bilan des forces extérieures appliquées au tronçon de gauche** (résolu au centre G de la section "coupée". Il s'exprime par:

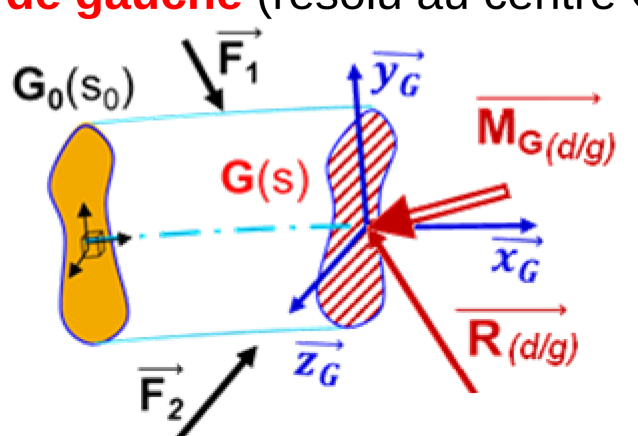
$$[\overrightarrow{F_e}]_g = {}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{R}_g\\ \overrightarrow{M_g}\end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{ext}}\\ \overrightarrow{M_{ext}}\end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix}N.\overrightarrow{x_G} + T_y.\overrightarrow{y_G} + T_z.\overrightarrow{z_G}\\ M_x.\overrightarrow{x_G} + M_y.\overrightarrow{y_G} + M_z.\overrightarrow{z_G}\end{Bmatrix}$$

dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section "coupée" .

  - Le **Torseur des éléments de cohésion** ${}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\}$ caractérise **le bilan des actions** appliquées par le **tronçon de droite sur le tronçon de gauche** (résolu au centre G de la section "coupée").

$${}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{(d/g)}}\\ \overrightarrow{M_{G(d/g)}}\end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

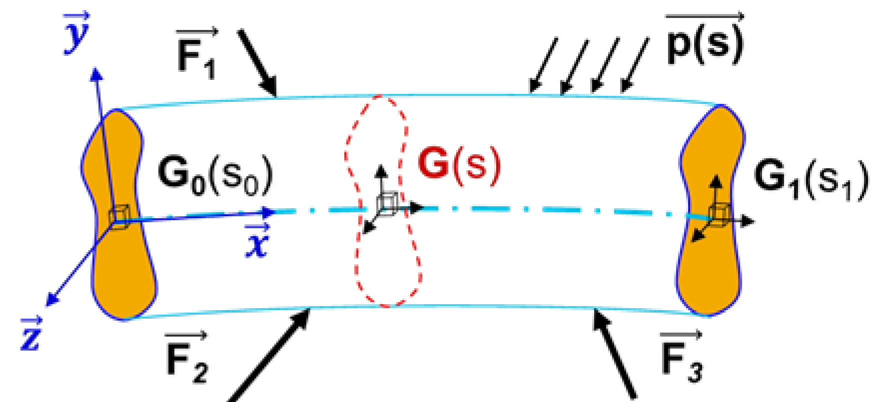
dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section coupée



IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

5.4 Torseur des éléments de réduction/ Torseur des éléments de cohésion

- **Étude de l'équilibre de la poutre:**

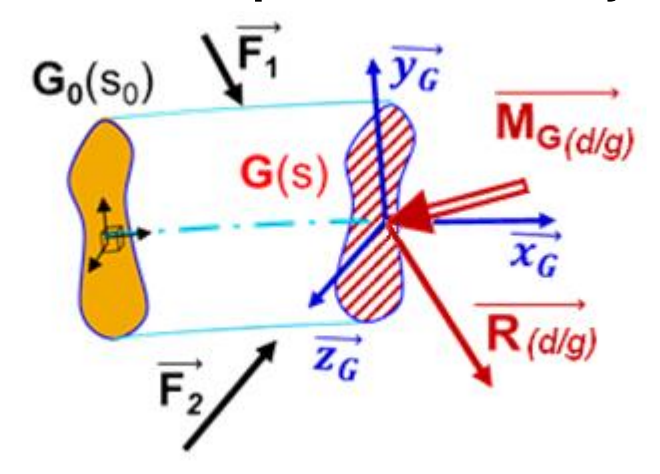


- Application du **P.F.S** au point **G**:

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} + {_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/d}\}} = \{\vec{0}\}$$

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} = - {_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/d}\}}$$

- **Étude de l'équilibre du Tronçon gauche :**



- Application du **P.F.S** au point **G**

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} + {_G\{\mathcal{T}_{d/g}\}} = \{\vec{0}\} \quad (i)$$

Principe de **l'Action / Réaction** :

$$_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = - {_G\{\mathcal{T}_{g/d}\}} \quad (ii)$$

Torseur des éléments de réduction (gauche)

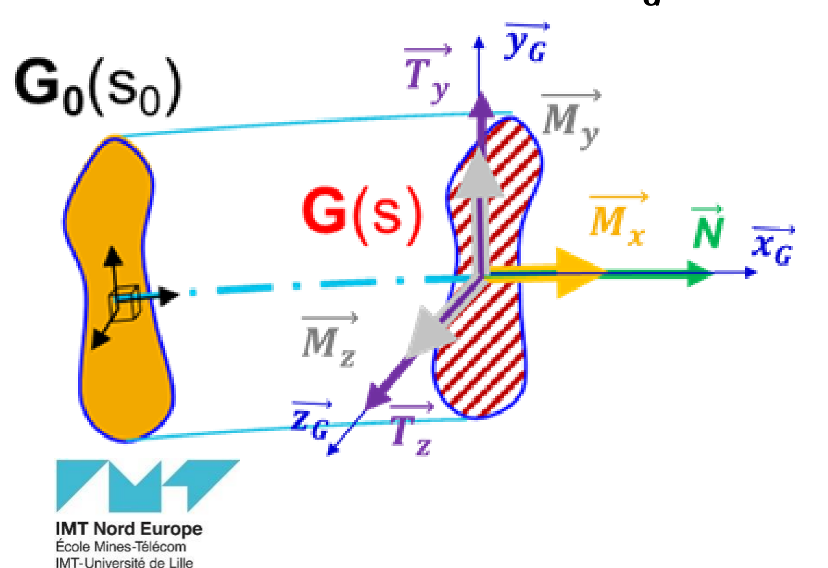
$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} = {_G\{\mathcal{T}_{g/d}\}} = - {_G\{\mathcal{T}_{d/g}\}}$$

Torseur des éléments de cohésion (droite)

- La **détermination des éléments de réduction** consiste à déterminer les composantes du torseur ${}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}$ en chaque point G le long de la fibre moyenne de la poutre **exprimé dans le repère local** $(G, \overrightarrow{x_G}, \overrightarrow{y_G}, \overrightarrow{z_G})$ **de la section**.

$$\underset{G}{\{\mathcal{T}_{ext/g}\}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} N.\overrightarrow{x_G} + T_y.\overrightarrow{y_G} + T_z.\overrightarrow{z_G} \\ M_x.\overrightarrow{x_G} + M_y.\overrightarrow{y_G} + M_z.\overrightarrow{z_G} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} N & Mx \\ Ty & My \\ Tz & Mz \end{Bmatrix}}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

- Dans le cadre d'un problème 3D (cas plus général que les problèmes plans), les composantes du torseur ${}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}$ désignent:



N: effort normal (à la section S) suivant $(G, \overrightarrow{x_G})$

T_y: effort tranchant suivant $(G, \overrightarrow{y_G})$

T_z: effort tranchant suivant $(G, \overrightarrow{z_G})$

M_x: moment de torsion autour $(G, \overrightarrow{x_G})$

M_y: moment fléchissant autour $(G, \overrightarrow{y_G})$

M_z: moment fléchissant autour $(G, \overrightarrow{z_G})$

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} N & Mx \\ Ty & My \\ Tz & Mz \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

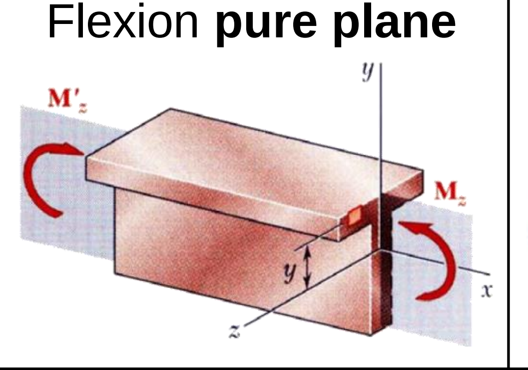
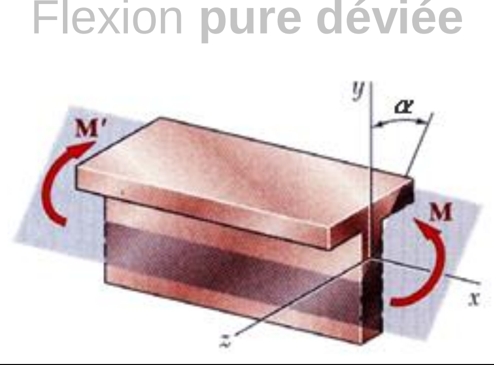
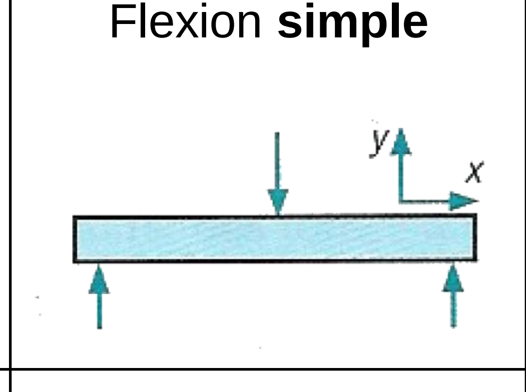
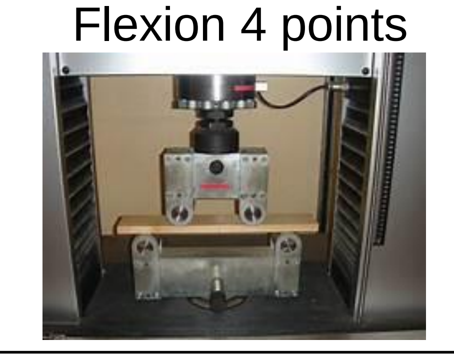
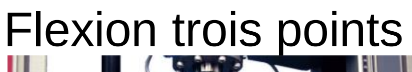
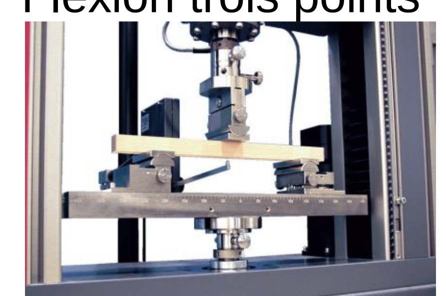
$G_0(s_0)$; $G(s)$; $\overrightarrow{T_y}$; $\overrightarrow{y_G}$; $\overrightarrow{M_y}$; $\overrightarrow{M_x}$; $\overrightarrow{N}$; $\overrightarrow{x_G}$; $\overrightarrow{M_z}$; $\overrightarrow{z_G}$; $\overrightarrow{T_z}$

- **Selon les valeurs prises par la résultante et le moment** du torseur des éléments de réduction, on identifie **les différentes sollicitations simples** auxquelles les poutres sont soumises.

Éléments de réduction

N	T_y ou T_z	M_x	$M_y$ou M_z	Identification de la sollicitation
≠0	=0	=0	=0	**N<0** Traction **N>0** Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0 =0 =0 ≠0	=0	=0 ≠0 ≠0 =0	Flexion simple

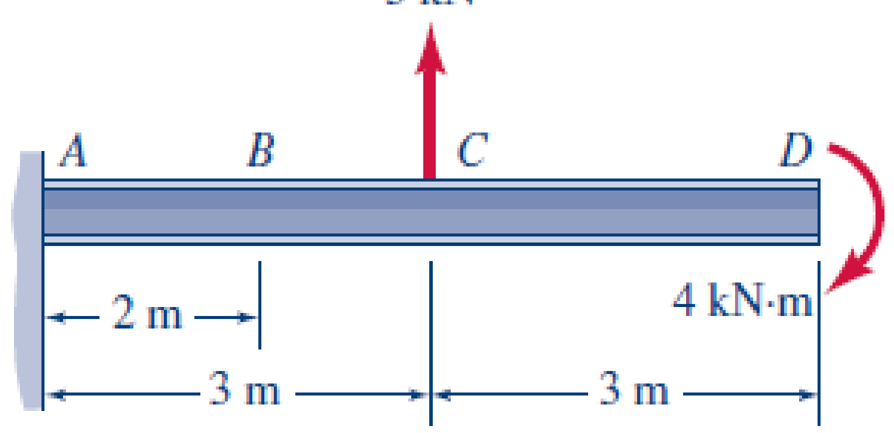
❑ Dans la partie 3 nous étudierons les types de flexions dont les torseurs des éléments de réductions correspondent aux cas suivants:

	Flexion **pure plane**	Flexion **pure déviée**	Flexion **simple**
dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section coupée			
${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & M_z \end{Bmatrix}$ ou ${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ - & M_y \\ 0 & - \end{Bmatrix}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Msin\alpha \\ 0 & Mcos\alpha \end{Bmatrix}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ T_y & - \\ - & M_z \end{Bmatrix}$ ou ${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ - & M_y \\ T_z & - \end{Bmatrix}$
Exemple	Flexion 4 points 		 Flexion trois points 



❑ Application directe: Exemple 1

Une poutre AD de longueur L est soudée à une structure au point A. La poutre est soumise à une force de 5 kN à une distance L/2 du point A et à une rotation suivant son sa plus longue dimension sous l'effet du moment M de 4 kN.m appliqué à son extrémité au point D.



1) Déterminer les éléments de réduction au point B situé à une distance L/3 du point A.

2) Déterminer les éléments de réduction tout au long de la poutre AD.



Application directe: Exemple 1

Résolution:

- Schématisation
  1) Représentation fibre moyenne
  2) Repère
  3) Sens positif
  4) Les liaisons
  5) Les forces de réaction

- Détermination des réactions:

Application du PFS

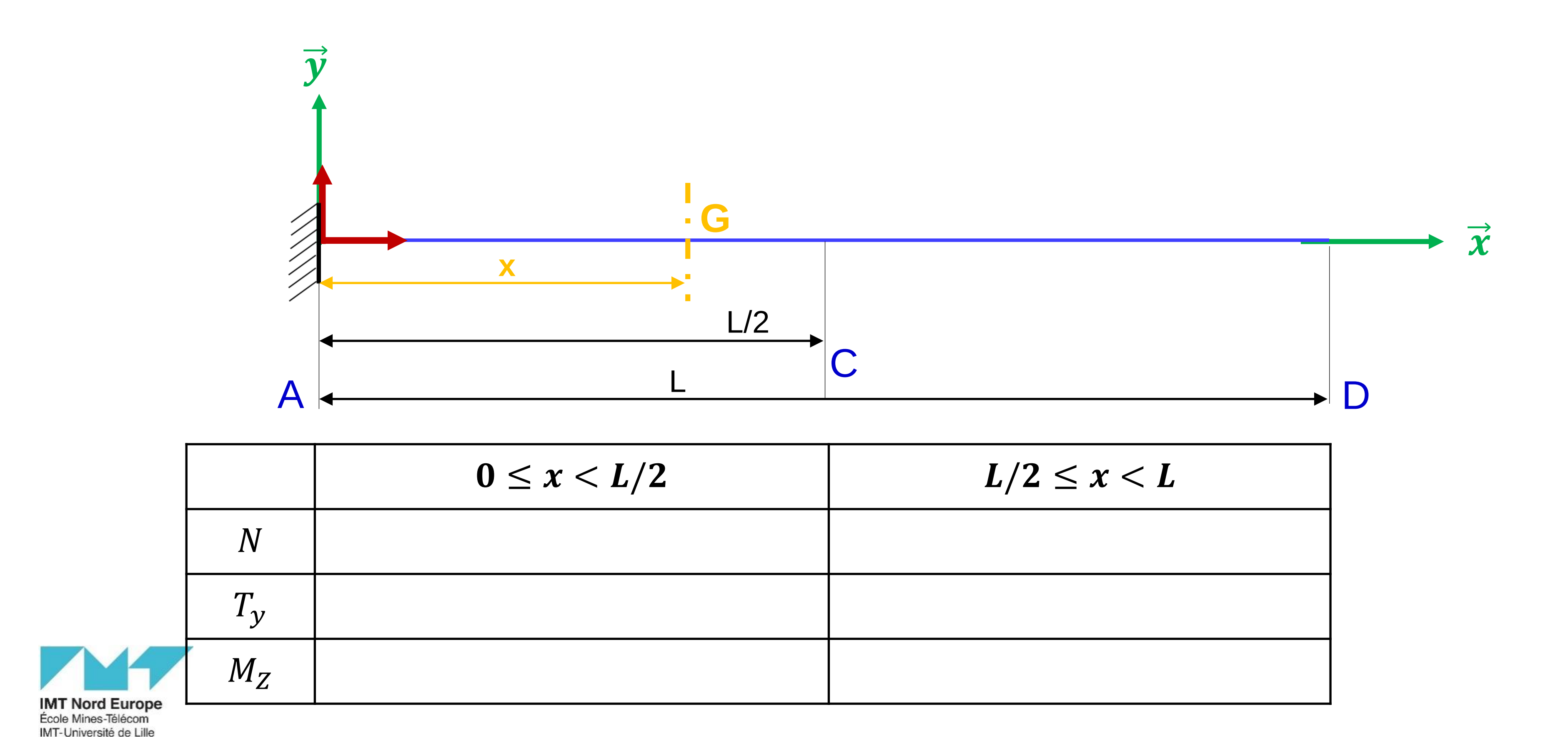


Application directe: Exemple 1

- Eléments de réduction en B



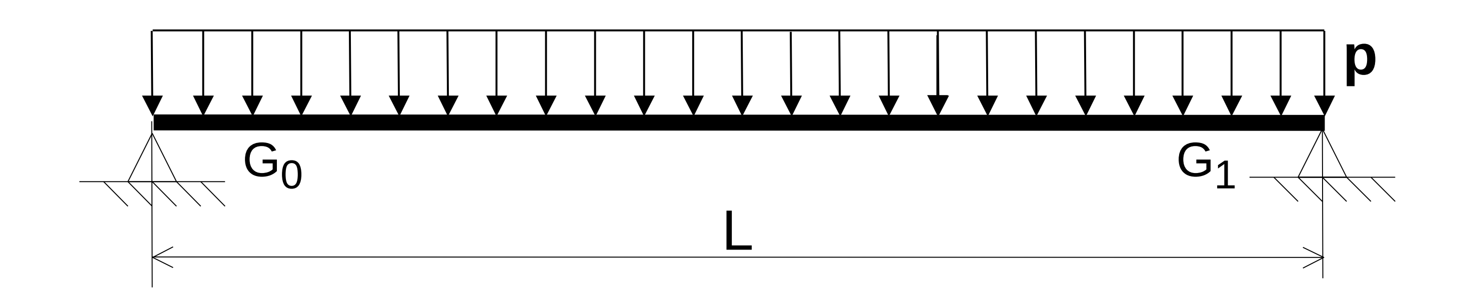
2) Déterminer les éléments de réduction tout au long de la poutre AD.



	$0 \leq x < L/2$	$L/2 \leq x < L$
N		
T_y		
M_Z		

❑ Application directe: Exemple 2

Une poutre droite, de longueur **L** et reposant sur deux appuis simples en G_0 et G_1, est soumise à une charge uniformément répartie de taux **p**.



Question: Calculer les éléments de réduction.



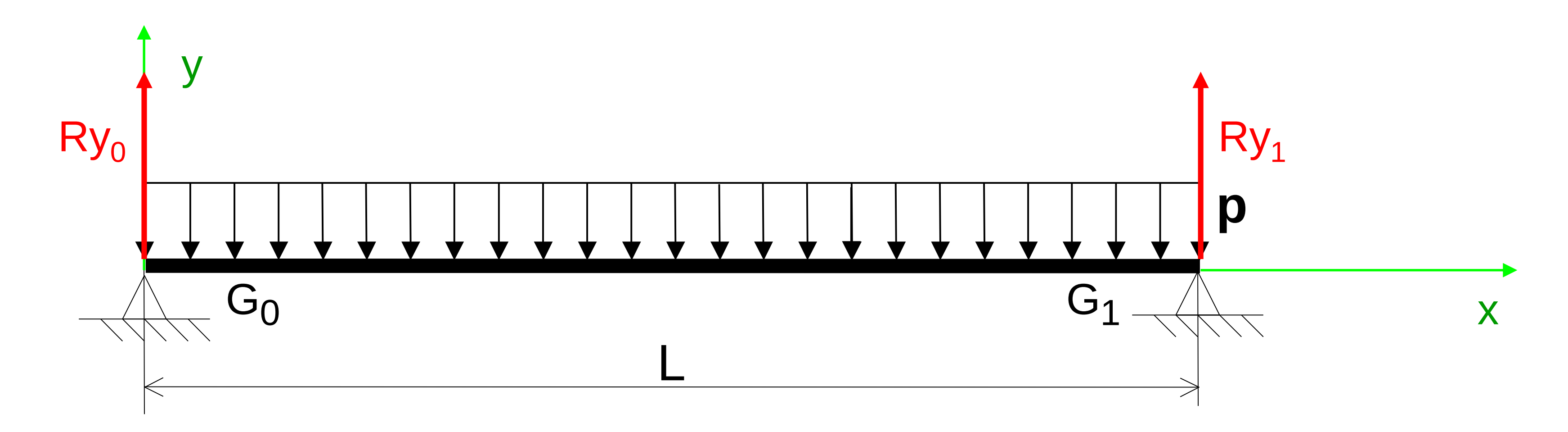
Démarche de résolution:

1) Schématisation:

   a. Définir le repère de travail

   b. Définir le sens positif des moments

   c. Représentation des forces de réaction et des moments au niveau des liaisons.

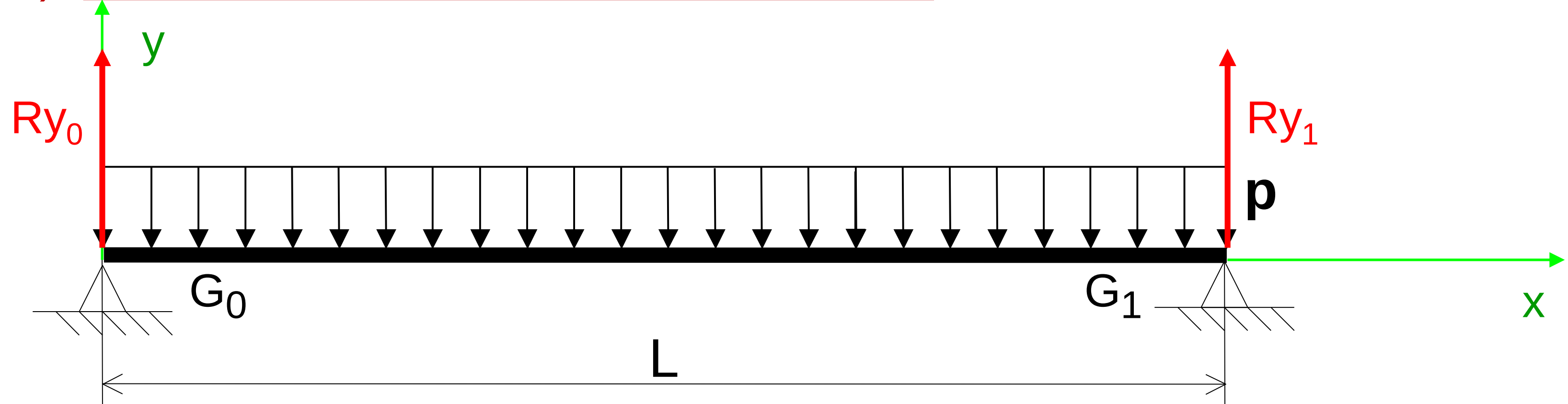




2) Résolution du problème statique:



2) Détermination des éléments de réduction:





Application directe: Exemple 2

Tracé des Diagrammes des éléments de réduction:

- ❑ **Diagramme de l’effort tranchant:**

- ❑ **Diagramme du moment de flexion:**



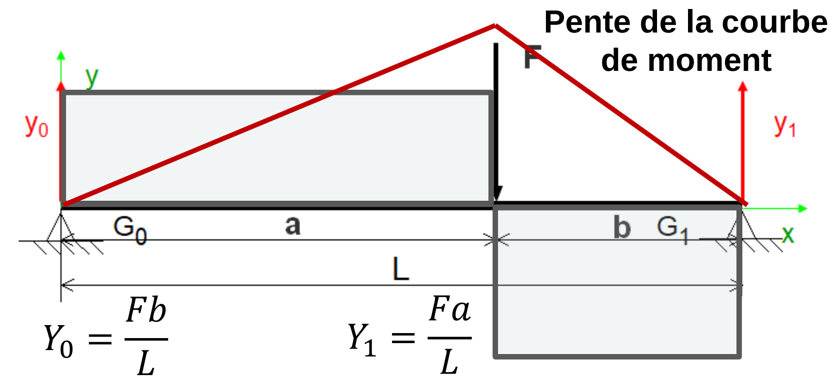
Tracé des diagrammes : (cas de la flexion)

Aide aux tracés : (Elts de réduction)

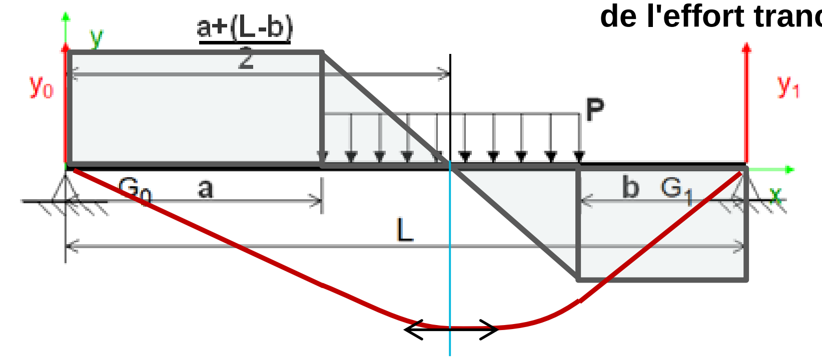
Une poutre sur 2 appuis

- **Conséquences de la règle :** $\dfrac{\partial M_z}{\partial x} = -T_y(x)$ $\quad M_z(x_2) = M_z(x_1) - \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} T_y(x)dx$

Pente de la courbe de moment — **Aire sous la courbe de l'effort tranchant**

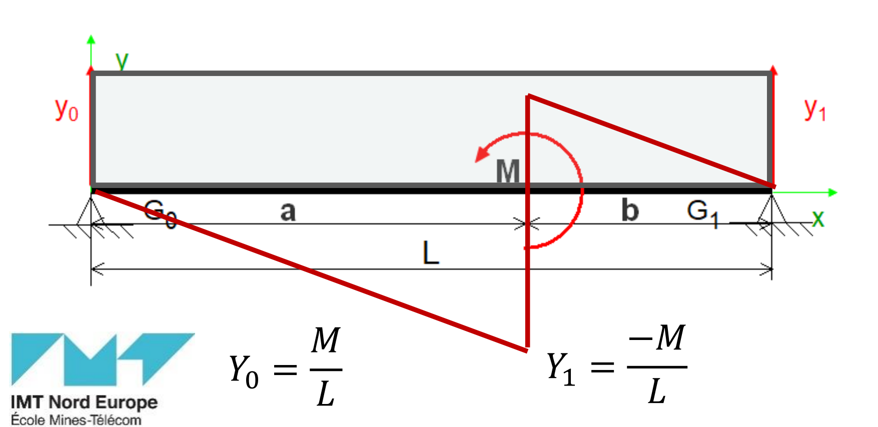


$$Y_0 = \frac{Fb}{L} \qquad Y_1 = \frac{Fa}{L}$$



$$Y_0 = \frac{P(L-a-b)\left(b + \frac{L-a-b}{2}\right)}{L} \qquad Y_0 = \frac{P\left((L-a)^2 - b^2\right)}{2L}$$

$$Y_1 = \frac{P(L-a-b)\left(a + \frac{L-a-b}{2}\right)}{L} \qquad Y_1 = \frac{P\left((L-b)^2 - a^2\right)}{2L}$$



$$Y_0 = \frac{M}{L} \qquad Y_1 = \frac{-M}{L}$$

- **Une poutre sur 2 appuis supporte souvent un chargement qui sera une combinaison de ces 3 chargements élémentaires considérés unitaires (F=1, P=1, M=1)**

- **Les tracés seront une superposition de ceux réalisés pour chaque chargement**

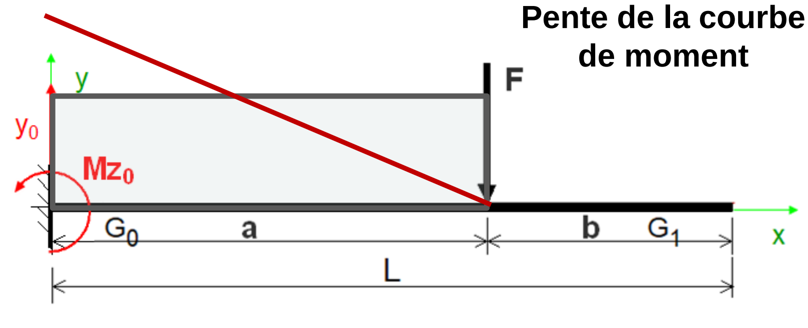
Aide aux tracés : (Elts de réduction)

poutre encastrée en une extrémité

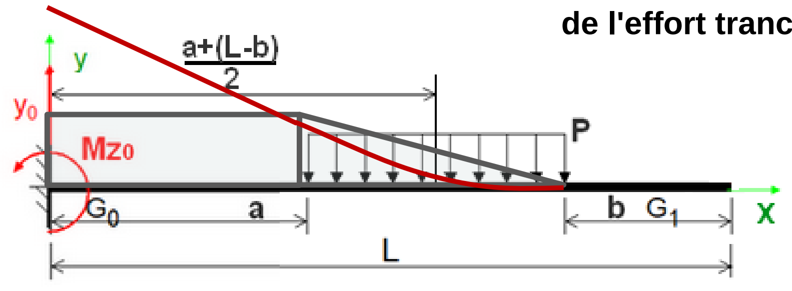
- **Conséquences de la règle :** $\dfrac{\partial M_z}{\partial x} = -T_y(x)$ **Pente de la courbe de moment**

$$M_z(x_2) = M_z(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} T_y(x)dx$$

Aire sous la courbe de l'effort tranchant

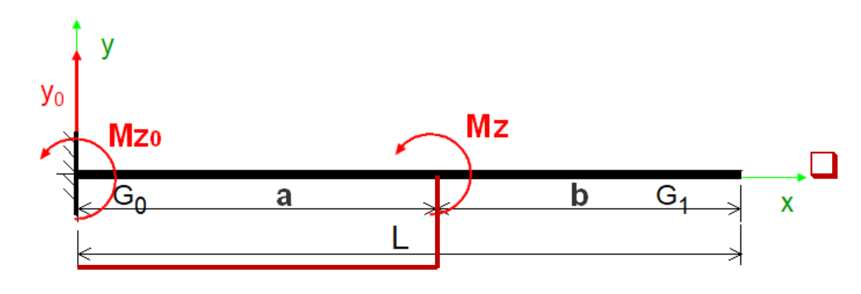


$$Y_0 = F \qquad Mz_0 = Fa$$



$$Y_0 = P(L-a-b)$$

$$Mz_0 = P(L-a-b)\left(\frac{a+L-b}{2}\right)$$



$$Y_0 = 0 \qquad Mz_0 = -Mz$$

- **Une poutre encastrée en une extrémité supporte souvent un chargement qui sera une combinaison de ces 3 chargements élémentaires considérés unitaires (F=1, P=1, M=1)**

- **Les tracés seront une superposition de ceux réalisés pour chaque chargement**





Résistance des Matériaux (RdM)

Séance 3

Partie 2 (2/2)

Intervenant:

AU: 2022-2023

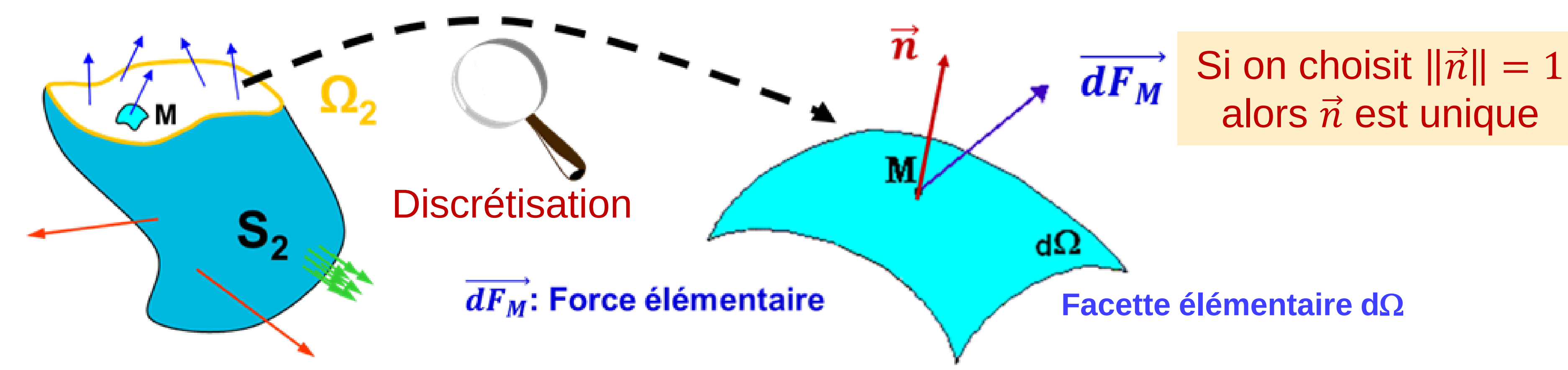
Partie 1

1. NOTION DE CONTRAINTE
2. NOTION DE DÉFORMATION
3. CARACTÉRISATION MÉCANIQUE D’UN MATÉRIAU
4. LOI DE COMPORTEMENT



1.2 Vecteur contrainte: Définition

- Soit le solide $\mathbf{S_2}$ et soit un point M localisé sur la surface $\mathbf{\Omega_2}$
- On identifie autour du point M une facette élémentaire **dΩ** de **vecteur normal sortant** (au point M) $\vec{\boldsymbol{n}}$ ($\vec{n}$ est le vecteur caractéristique de la surface)



❑ **Définition**: **le vecteur contrainte** (on le note $\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})$) au point M de la surface dΩ de normale sortante $\vec{\boldsymbol{n}}$ est donné par:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{d\Omega \to 0} \frac{\overrightarrow{dF_M}}{d\Omega}$$

Contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$
σ_n
$\vec{n}$
M
$\vec{t}$
τ
$d\Omega \to 0$



1.8 Fiche récapitulative

Vecteur contrainte

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overrightarrow{\sigma_n(M,\vec{n})} + \overrightarrow{\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n})}$$

Contrainte normale

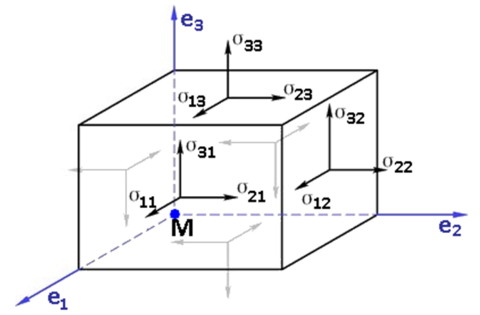
$$\sigma_n(M,\vec{n}) = \vec{n}\cdot\vec{T}(M,\vec{n})$$

Contrainte de cisaillement

$$\boldsymbol{\tau}(M,\vec{n}) = \left\|\vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M},\vec{\boldsymbol{n}}) \wedge \vec{\boldsymbol{n}}\right\|$$

Etat de contraintes

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$



Vecteur contrainte

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \qquad \|\vec{\boldsymbol{n}}\| = 1$$

$$\vec{T}(M,\vec{e_i}) = \begin{bmatrix} \sigma_{1i} \\ \sigma_{2i} \\ \sigma_{3i} \end{bmatrix}$$

Etat de contraintes principales

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}_{(\vec{p_1},\vec{p_2},\vec{p_3})}$$

Changement de repère

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}'_{R2} = \overline{\overline{{}^{R2}T_{R1}}} \times \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_{R1} \times \overline{\overline{{}^{R1}T_{R2}}}$$



2.5 Matrice de déformation : propriétés

Etudions la matrice : $\bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$$

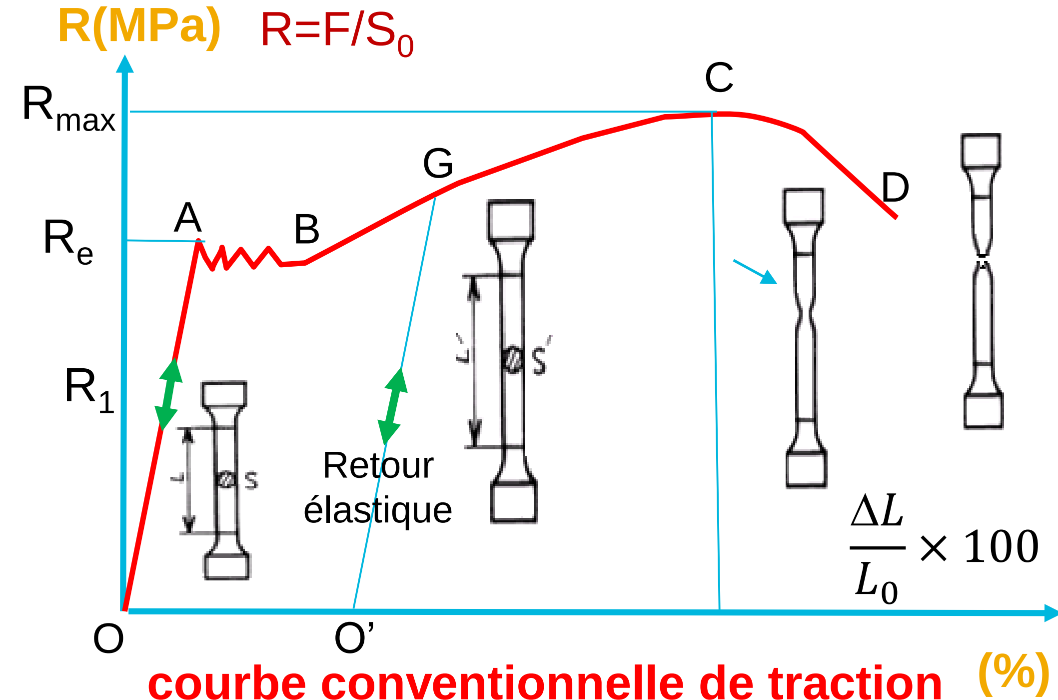
- Mathématiquement la matrice de déformation se comporte de la même manière que la matrice de contraintes.
- Elle est symétrique, diagonalisable, on peut la changer de repère.
- Le repère principal est identique pour la matrice de déformation et de contrainte



3.3 Essai de traction : courbe conventionnelle de traction

Enregistrement des capteurs de force et d'extensométrie :
Force , Allongement ΔL

Tracé de la **force unitaire** de traction en fonction de l'allongement pourcent



courbe conventionnelle de traction

Allongement ΔL (mm)

$R=F/S_0$: Force unitaire de traction (MPa)

Trois zones de comportement:

Zone élastique (OA)

- Allongement **linéaire réparti** : déformation totalement réversible.

(Zone de déformation plastique AD)

Zone d'écrouissage (AC)

- Allongement **non linéaire réparti** : déformation partiellement irréversible

(élastique+plastique)

(**parfois** palier d'écoulement plastique AB)

Zone de striction (CD)

- **Allongement localisé** au niveau d'une section droite qui diminue jusqu'à rupture.

(O'G) : en cours d'essai si la force est annulée, on observe un retour élastique du matériau (réversible)



Loi de Hooke généralisée
(Repère quelconque)

$$\varepsilon_{ij}=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\delta_{ij}$$

Inversion de la loi de Hooke généralisée inversée
(Repère quelconque)

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}$$

Que l'on pose aussi $\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}$

Grandeurs caractéristiques des matériaux

μ, λ **coefficients de Lamé**

E **Module de YOUNG**

ν **Coefficient de Poisson**

μ **Module de COULOMB**

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-\mathbf{2}\nu)}\\[2ex] \mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\\[2ex] \nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\\[2ex] E=\mu\,\dfrac{3\lambda+2\mu}{\mu+\lambda}\end{array}\right.$$



PARTIE 2

Rappel Séance 2

DÉMARCHE DE RÉSOLUTION D’UN PROBLÈME DE RdM

ETAPE 1 :

- Schématisation
- Hypothèses de la RdM

ETAPE 2 : RÉSOLUTION PROBLÈME STATIQUE

- Principe fondamental de la statique (PFS)
- Liaisons

ETAPE 3 : DIMENSIONNEMENT

- Eléments de réduction
- Équations d'équilibre en RdM
- Equations d'équilibre d'une section

COMPLÉMENT DE COURS:

- Propriétés de sections



❑ Comment vérifier les critères usuels pour les poutres ?

Scénario: *« Soit une automobile de 1200 Kg qui se déplace sur un pont de 30 m de longueur et 20 tonnes de masse (figure 1). Le véhicule s'arrete brusquement à 10 m du point B»*

❑ Problème de RdM

Le pont risque t'il de fléchir sous l'action du poids du vehicle ?

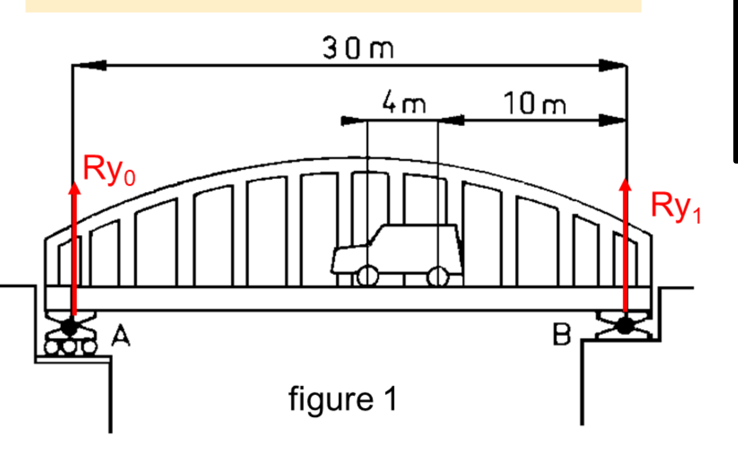
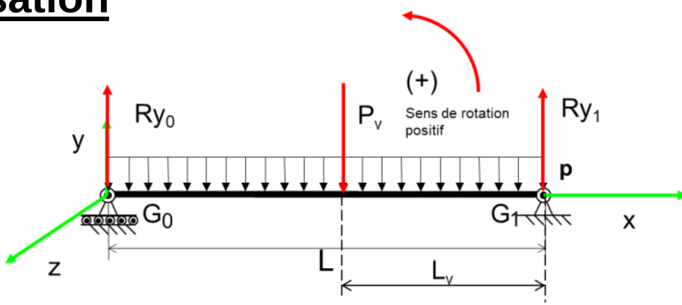


figure 1

❑ La résolution par la RdM se fait en trois étapes

I. Etape 1: la schématisation

Composant (poutre ?)
Schématisation
Liaisons/sollicitations
Hypothèses de la RdM



II. Etape 2: Résolution du problème statique :
recherche actions "passives"

$$\begin{cases} Ry_0 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L_v)}{L} \\ Ry_1 = \dfrac{pL^2/2 + P_v(L - L_v)}{L} \end{cases}$$

III. Etape 3: Dimensionnement

Vérification de critères en contrainte ou en déformation



I. Schématisation

1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème statique

Principe fondamental de la statique (PFS)

1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

Système isostatique/hyperstatique

III. Dimensionnement / vérification:

3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction
5. Contraintes ou 5. Déformations

Contraintes → critère de résistance → Critère de limite d'élasticité (non vérifié → retour à 3)

Déformations → critère de comportement → Critère de déformation (non vérifié → retour à 3)

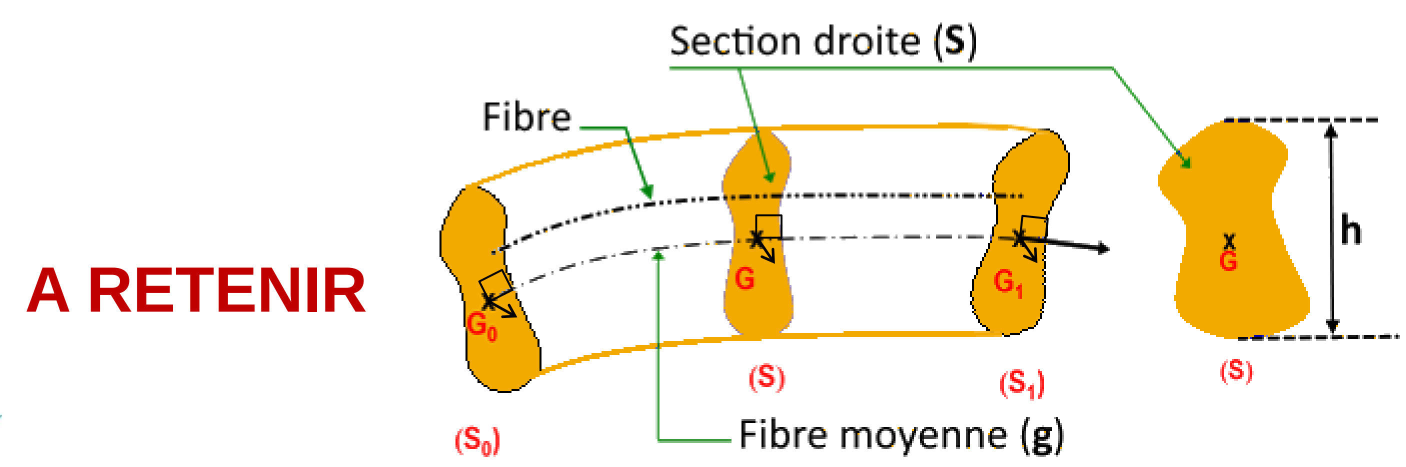
Est-ce que la structure et/ou le composant vérifie le critère (Contrainte/Déformations) ?

A RETENIR



❑ Géométrie (Hypothèse 1 de la RdM)

- Les composants étudiés en RdM sont **des poutres**.
- Par définition,
  - Une **poutre** est engendrée par une surface plane **S** nommée **section droite** dont le centre d'inertie (ou barycentre) **G** parcourt une courbe continue **g** appelée **fibre moyenne**;
  - La **section droite (S)** reste **perpendiculaire** à la fibre moyenne **g**;
  - Toute courbe parallèle à la courbe moyenne **g** est appelée **fibre**;





❑ Critères géométriques d'une poutre:

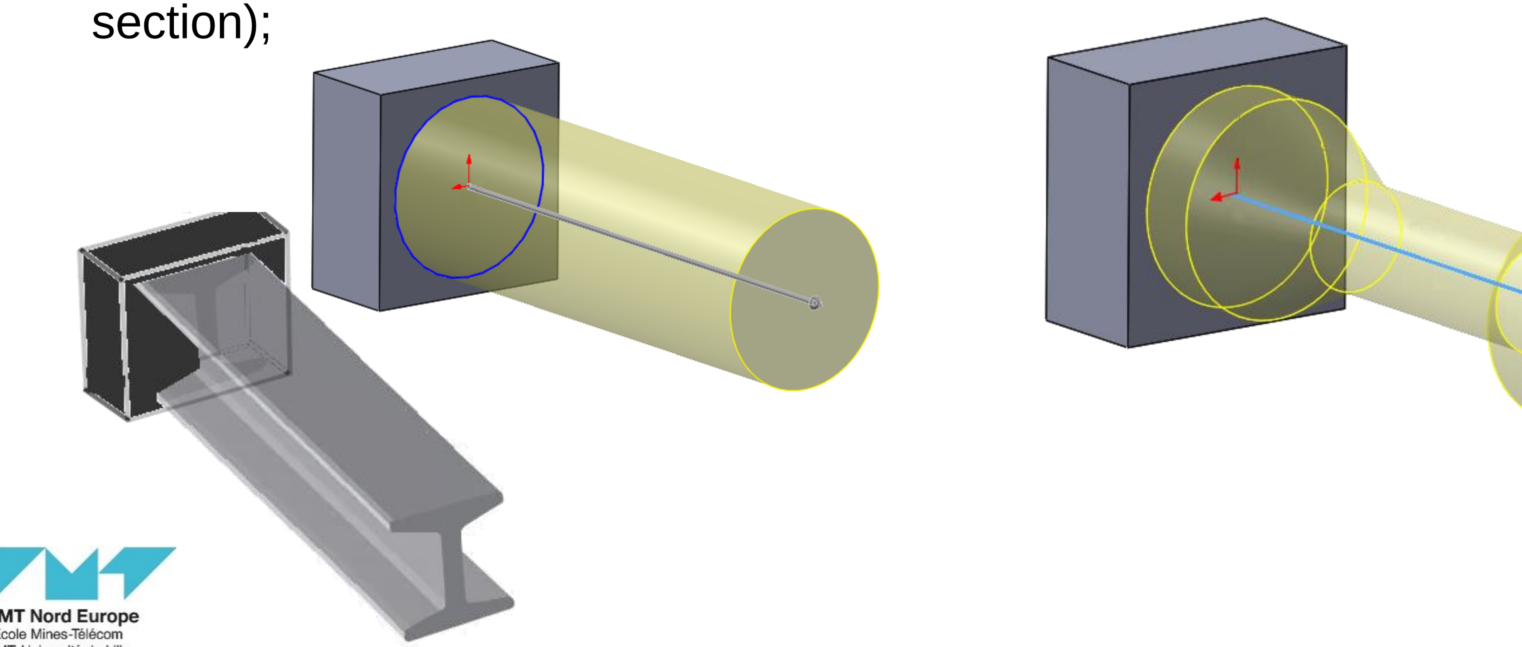
- La **longueur L** de la fibre moyenne doit être suffisamment grande devant la plus grande dimension **h** de la section droite (S):

$$5h < L < 30h$$

- Le **rayon de courbure R** en tout point de **g** de la fibre moyenne doit vérifier:

$$R > 20h$$

- Les **variations de forme et de dimensions de la section** (**S**) le long de la fibre moyenne **g** doivent être **progressives** (pas de variation brusque de la section);



IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

- Chaque liaison d'un solide S_2 avec un solide S_1 est caractérisée par **deux torseurs:**

❑ **Torseur cinématique :**

Il traduit la vitesse relative du solide S_2 par rapport à un autre solide S_1

$$_O\{V_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z} \\ \vec{V}_{O,S_2/S_1} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} +. V_z\vec{z} \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec,

$\overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1}$ $\vec{V}_{O,S_2/S_1}$

$\overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1}$: vecteur vitesse de rotation

$\vec{V}_{O,S_2/S_1}$: vecteur vitesse du point O appartenant au solide S_2 par rapport au solide S_1

❑ **Torseur statique (Torseur de liaison):**

Il traduit les efforts et moments transmissibles d'un solide S_2 à un autre solide S_1.

$$_O\{\tau_{S2/S1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{S_2/S_1} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{O,S_2/S_1} = L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{ \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Avec,

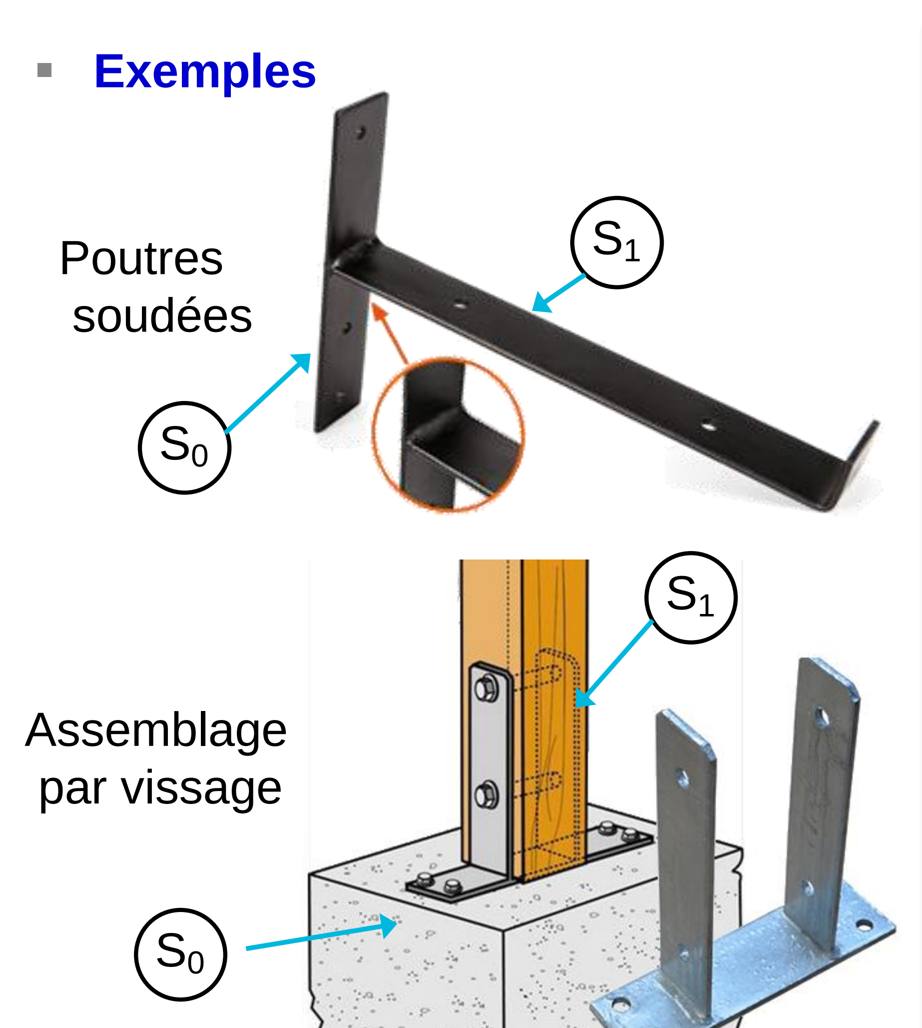
$\vec{F}_{S_1/S_2}$ $\overrightarrow{M}_{O,S_1/S_2}$

$\vec{F}_{S_2/S_1}$: Force exercée par S_2 sur S_1.

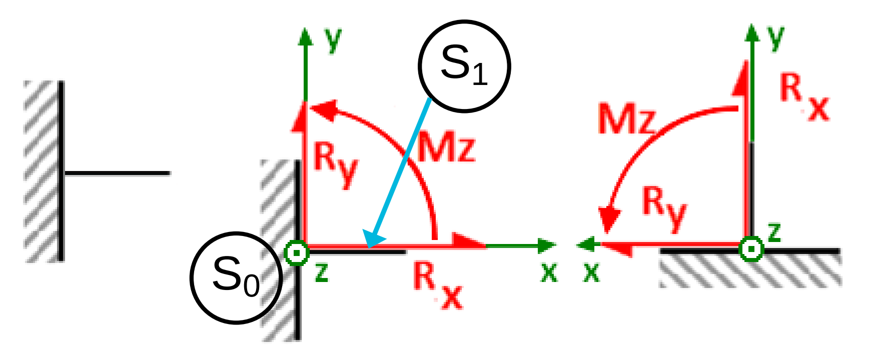
$\overrightarrow{M}_{O,S_2/S_1}$: Moment au point O de S_2 sur S_1.

❑ Liaison encastrement

- **Exemples**



- **Représentation plane**



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

$$_O\{V_{S0/S1}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \cancel{\omega_x} & V_x = 0 \\ \cancel{\omega_y} & V_y = 0 \\ \omega_z = 0 & \cancel{V_z} \end{Bmatrix}$$

- **Torseur statique**

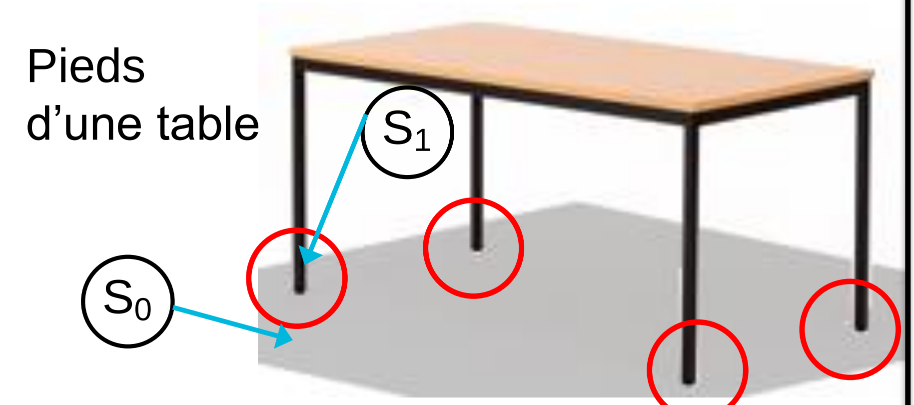
$$_O\{\tau_{S0/S1}\} = {}_O\begin{Bmatrix} R_x & - \\ R_y & - \\ - & M_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

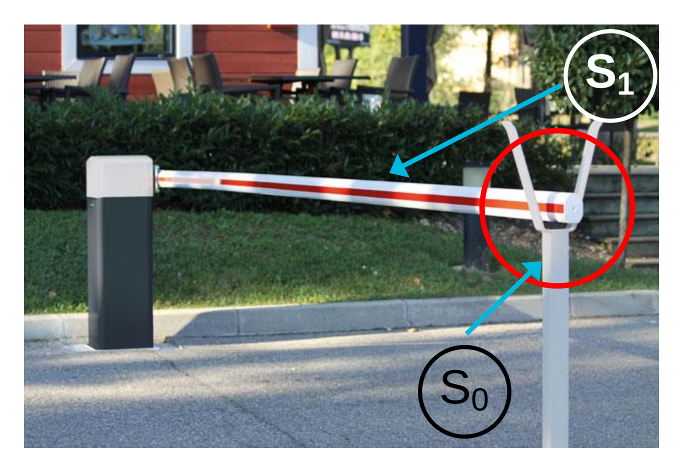
❑ Liaison appui simple (ou ponctuelle)

- **Exemples:**

Pieds d'une table

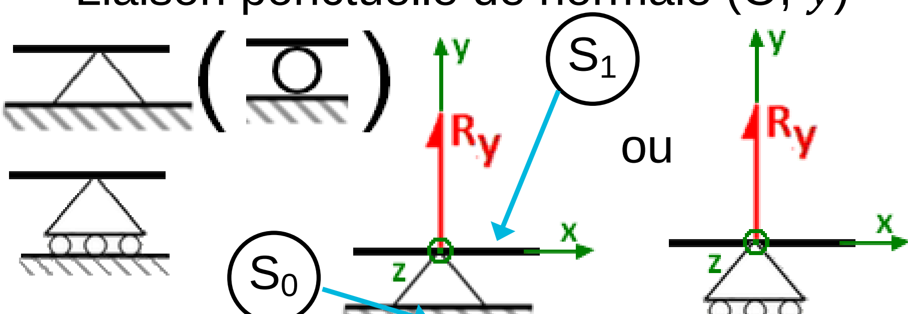


Barrière levante



- **Représentation plane**

Liaison ponctuelle de normale (O, $\vec{y}$)



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

$$_O\{V_{S0/S1}\} = \left\{\begin{matrix} \cancel{\omega_x} & V_x \\ \cancel{\omega_y} & V_y \\ \omega_z & \cancel{V_z} \end{matrix}\right\}_O = 0$$

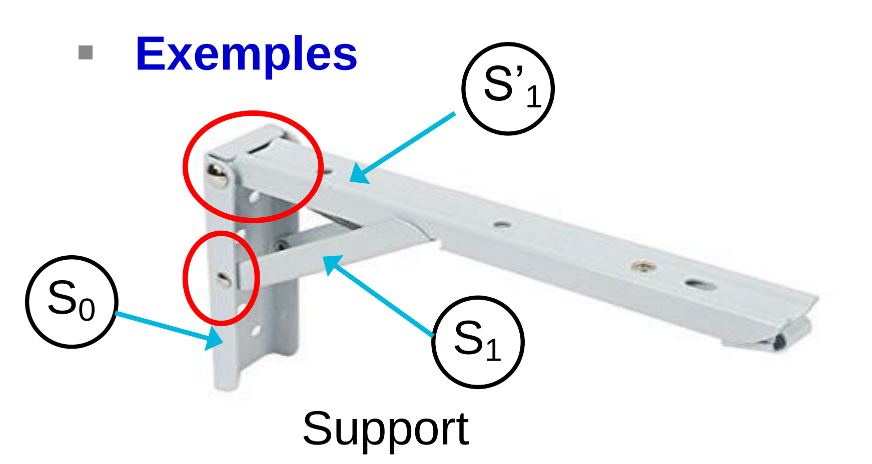
- **Torseur statique**

$$_O\{\tau_{S0/S1}\} = \left\{\begin{matrix} R_x = 0 & - \\ R_y & - \\ - & M_z = 0 \end{matrix}\right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Liaison pivot

- **Exemples**

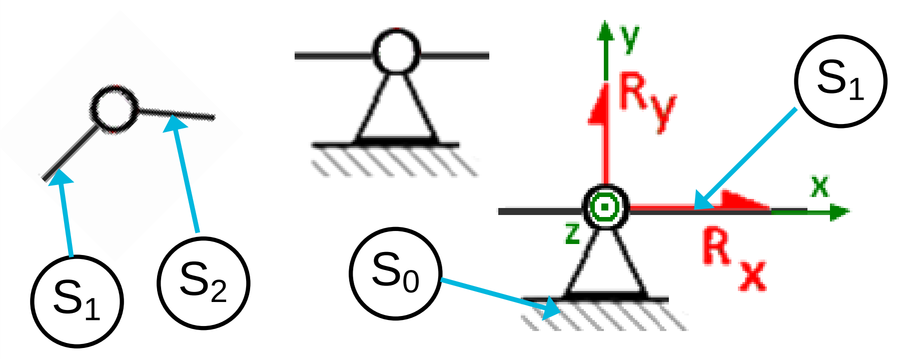


Support



Domaine du génie civil: les ponts

- **Représentation plane d'axe (O, $\vec{z}$)**



- **Mouvements possibles (problème plan de normale $\vec{z}$)**

$$_O\{V_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} \cancel{\omega_x} & V_x = 0 \\ \cancel{\omega_y} & V_y = 0 \\ \omega_z & \cancel{V_z} \end{Bmatrix}_O$$

- **Torseur statique**

$$_O\{\tau_{S0/S1}\} = \begin{Bmatrix} R_x & - \\ R_y & - \\ - & M_z = 0 \end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



4.5 Chargement actif et Chargement réactif (passif)

Le chargement qui s'exerce sur une structure se décompose en :

❑ **Eléments de chargement actif**

- Ils s'expriment sous la forme de forces, moments, charges linéiques, ou charges à distance (telles le poids, les forces électrostatiques).
- Ils peuvent s'appliquer directement sur la structure ou par l'intermédiaire des liaisons qui relient la structure à son environnement.
- **Ils correspondent aux <u>données d'entrée connues du problème</u>.**

❑ **Eléments de chargement réactif (passif)**

- Ils sont appliqués à la structure à travers les liaisons qui relient la structure à son environnement, ils "s'adaptent" au chargement actif.
- **ce sont <u>les inconnues du problème</u>.**

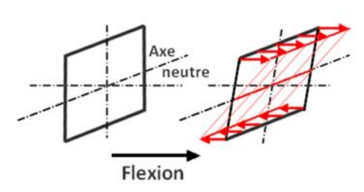


❑ Récapitulatif des hypothèses de la RdM

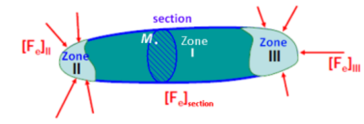
- Hypothèse 1 : Hypothèse géométrique $5h<L<30h$, $R_{courbure}>20h$
- Hypothèse 2 : Homogénéité et isotropie des matériaux
- Hypothèse 3 : Comportement élastique linéaire
- Hypothèse 4 : Action statique des forces
- Hypothèse 5 : Conservation des dimensions initiales (détermination chargement)
- Hypothèse 6 : Hypothèse de Barré de Saint Venant
- Hypothèse 7 : Hypothèse de Navier Bernouilli



- Hypothèse 8 : Hypothèse de continuité des modèles f’, f’’ continues
- Hypothèse 9 : Hypothèse Barré de Saint Venant (flexion)



- Hypothèse 10 : Problème de Barré de Saint Venant





I. Schématisation

1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème statique

Principe fondamental de la statique (PFS)

1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

5. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
5. Eléments de réduction / cohésion
5. Contraintes
5. Déformations

ou

critère de résistance

critère de comportement

Critère de limite d'élasticité

Critère de déformation

non vérifié

non vérifié

Cette partie a pour objectif, de rappeler les principes du calcul statique nécessaires à l'identification complète du chargement qui s'applique à un élément poutre.



- **Identification d'une force par un torseur:**

L'A.M que crée une force $\vec{F}$ appliquée en un point P d'un corps est équivalente à L'A.M que crée la même force $\vec{F}$ appliquée en tout autre point A de ce même corps, à laquelle on ajoute le moment généré par cette force $\vec{F}$ au point A.

- On modélise de façon générale une force à l'aide d'un **torseur : on l'exprime avec 2 vecteurs**: le vecteur force, et le vecteur du moment de cette force calculé en un point A (si A est le point d'application de la force $\overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0}$)

$$_A\{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2}) \end{Bmatrix} \qquad _A\{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} F_x & L \\ F_y & M \\ F_z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}\ \ \vec{y}\ \ \vec{z})}$$

- **Transport d'un torseur** : Définir en un point B, l'incidence d'une force (torseur) exercée initialement en un point A

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2}$$

$$_B\{\mathcal{T}_{1\rightarrow 2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{\mathcal{F}}_{1\rightarrow 2}) \end{Bmatrix}$$

← Résultante: invariante

← Moment: dépend du point B



Étant donnée **la nature plane** des problèmes à résoudre, l'équilibre du **système étudié isolé** se réduit à un système de trois équations, extraites de l'équation torsorielle générale du PFS:

« torseurs Chgt actif»+« torseurs Chgt réactif» = « torseur nul »

Dans repère global $(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{z_0})$

$$\sum_{i=1}^{i=n} {}_O\begin{Bmatrix} X_i & 0 \\ Y_i & 0 \\ 0 & N_i \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})} + \sum_{j=1}^{j=m} {}_O\begin{Bmatrix} X_j & 0 \\ Y_j & 0 \\ 0 & N_j \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} X_i \ (proj/X) \\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \ (proj/Y) \\ \sum_{i=1}^{i=n} N_i \ (Mt(O)/Z) \end{cases}$$

Chgt actif

Chargement extérieur connu qui s'applique sur le système isolé

Chgt réactif

Réactions de Liaisons du système isolé qui sont inconnues

problèmes plans
3 équations d'équilibre

Quelques rappels de règles pour faciliter les calculs :

Système isostatique / Système hyperstatique:

Lorsque le **problème de statique à résoudre est plan**, l'équilibre du système se réduit à un système de **trois équations**, extraites de l'équation torsorielle générale (**PFS**)..

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} X_i \ (proj/X) \\ \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \ (proj/Y) \\ \sum_{i=1}^{i=n} N_i \ (Mt(O)/Z) \end{cases}_O$$

La Résolution du problème statique dépend du nombre d'inconnues introduites par les réactions de liaisons :

- moins de 3 inconnues: le problème est dit **hypostatique**. L'équilibre statique est en général impossible, sauf si les forces connues satisfont à certaines conditions.

– **3 inconnues :** le problème est dit **isostatique** ou statiquement défini.

– **plus de 3 inconnues** : le problème est dit **hyperstatique**, il est mathématiquement indéterminé. Pour pouvoir être résolu, il faut autant d'équations supplémentaires qu'il y a d'inconnues surabondantes (>3). L'étude des déformations permet d'écrire les équations manquantes, ce qui lèvera l'indétermination.



L'étude de l'isostatisme des mécanismes fait l'objet d'études plus poussées.

I. Schématisation

1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème (statique)

Principe fondamental de la statique (PFS)

1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

III. Dimensionnement

3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)

3. Eléments de réduction / cohésion

5. Contraintes — critère de résistance → Critère de limite d'élasticité

ou

5. Déformations — critère de comportement → Critère de déformation

non vérifié

non vérifié

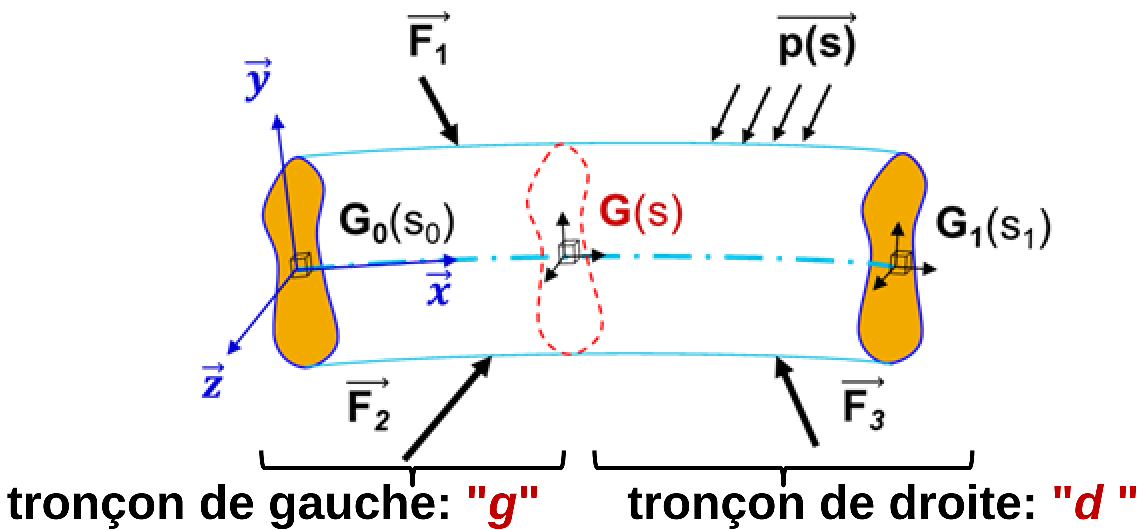


5. Équations d'équilibre en RdM

5.3 Notion de coupe fictive (tronçons)

Pour évaluer la résistance de la poutre aux efforts extérieurs $\overrightarrow{F_{ext}}$, il faut connaitre la répartition des **efforts intérieurs** (dans le matériau).

- Soit une **coupe fictive** selon une section de la poutre de centre **G situé sur fibre** moyenne **(g)** et d'abscisse curviligne (s)
- La poutre est ainsi décomposée en deux tronçons:
  - Un tronçon dit le **tronçon de gauche** (noté ***"g"***) , défini par la partie **G_0G**;
  - Un tronçon dit le **tronçon de droite** (noté ***"d "***) , défini par la partie **GG_1**;



5.4 Torseur des éléments de réduction/ Torseur des éléments de cohésion

❑ Par convention (dans le cadre de ce cours):

- Le **<u>Torseur des éléments de réduction</u>** $_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}$ caractérise le **bilan des forces extérieures appliquées au tronçon de gauche** (résolu au centre G de la section "coupée". Il s'exprime par:

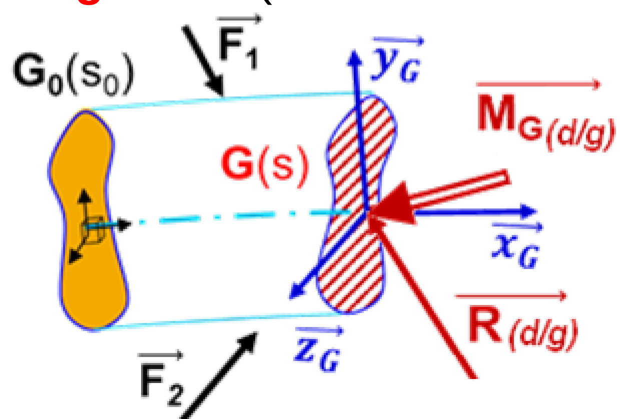
$$[\overrightarrow{F_e}]_g = {}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{R}_g\\ \overrightarrow{M_g}\end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{ext}}\\ \overrightarrow{M_{ext}}\end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} N.\overrightarrow{x_G} + T_y.\overrightarrow{y_G} + T_z.\overrightarrow{z_G}\\ M_x.\overrightarrow{x_G} + M_y.\overrightarrow{y_G} + M_z.\overrightarrow{z_G}\end{Bmatrix}$$

dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section "coupée" .

- Le **<u>Torseur des éléments de cohésion</u>** $_G\{\mathcal{T}_{d/g}\}$ caractérise **le bilan des actions** appliquées par le **tronçon de droite sur le tronçon de gauche** (résolu au centre G de la section "coupée").

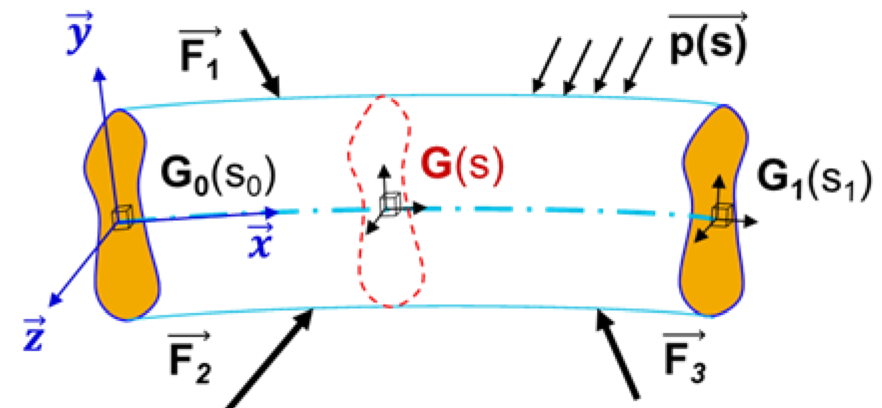
$$_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{(d/g)}}\\ \overrightarrow{M_{G(d/g)}}\end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section coupée



5.4 Torseur des éléments de réduction/ Torseur des éléments de cohésion

- **Étude de l'équilibre de la poutre:**



- Application du **P.F.S** au point **G**:

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/d}\} = \{\vec{0}\}$$

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} = - {}_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/d}\}$$

- **Étude de l'équilibre du Tronçon gauche :**

- Application du **P.F.S** au point **G**

$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = \{\vec{0}\} \quad (i)$$

Principe de **l'Action / Réaction** :

$$_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = - {}_G\{\mathcal{T}_{g/d}\} \quad (ii)$$

Torseur des éléments de réduction (gauche)

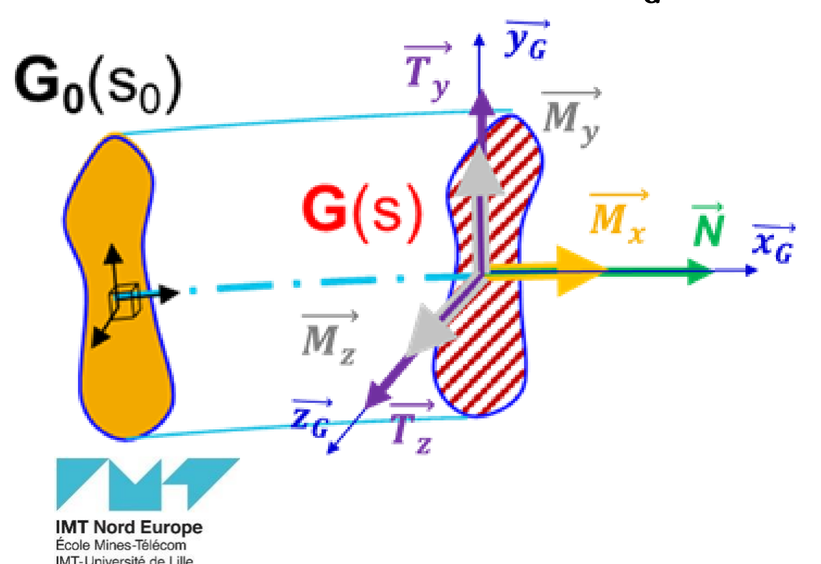
$$_G\{\mathcal{T}_{F_{ext}/g}\} = {}_G\{\mathcal{T}_{g/d}\} = - {}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\}$$

Torseur des éléments de cohésion (droite)

- La **détermination des éléments de réduction** consiste à déterminer les composantes du torseur $_G\{\mathcal{T}_{F_{ext/g}}\}$ en chaque point G le long de la fibre moyenne de la poutre **exprimé dans le repère local** $(G, \overrightarrow{x_G}, \overrightarrow{y_G}, \overrightarrow{z_G})$ **de la section**.

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} N.\overrightarrow{x_G} + T_y.\overrightarrow{y_G} + T_z.\overrightarrow{z_G} \\ M_x.\overrightarrow{x_G} + M_y.\overrightarrow{y_G} + M_z.\overrightarrow{z_G} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} N & Mx \\ Ty & My \\ Tz & Mz \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

- Dans le cadre d'un problème 3D (cas plus général que les problèmes plans), les composantes du torseur $_G\{\mathcal{T}_{F_{ext/g}}\}$ désignent:



N: effort normal (à la section S) suivant $(G, \overrightarrow{x_G})$

T_y: effort tranchant suivant $(G, \overrightarrow{y_G})$

T_z: effort tranchant suivant $(G, \overrightarrow{z_G})$

M_x: moment de torsion autour $(G, \overrightarrow{x_G})$

M_y: moment fléchissant autour $(G, \overrightarrow{y_G})$

M_z: moment fléchissant autour $(G, \overrightarrow{z_G})$

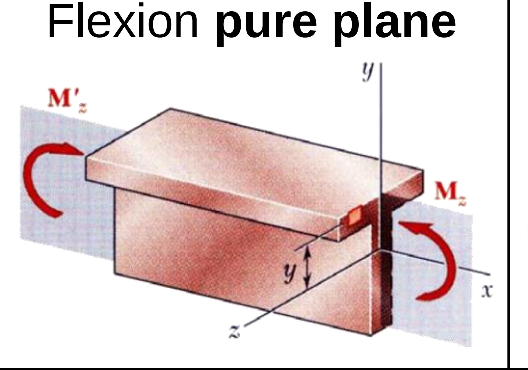
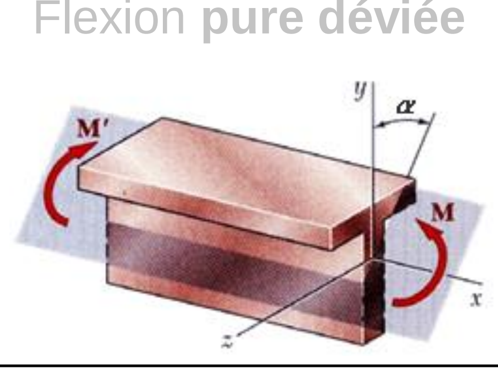
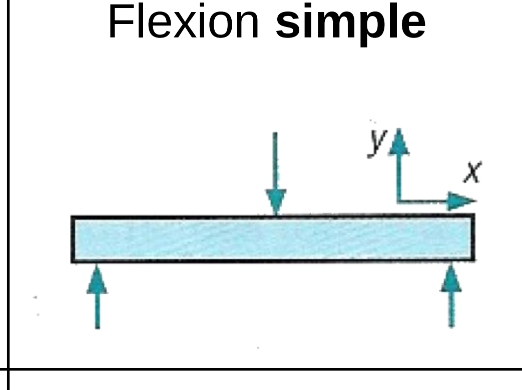
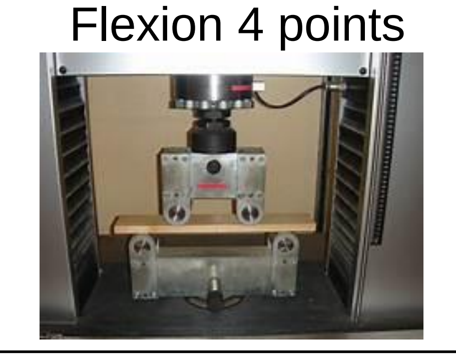
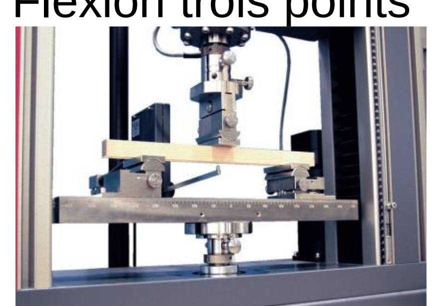
$$\left\{\mathcal{T}_{ext/g}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} N & Mx \\ Ty & My \\ Tz & Mz \end{matrix}\right\}_{G\,(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

- **Selon les valeurs prises par la résultante et le moment** du torseur des éléments de réduction, on identifie **les différentes sollicitations simples** auxquelles les poutres sont soumises.

Éléments de réduction

N	T_y ou T_z	M_x	M_y ou M_z	Identification de la sollicitation
≠0	=0	=0	=0	**N<0** Traction **N>0** Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0 =0 =0 ≠0	=0	=0 ≠0 ≠0 =0	Flexion simple

- Dans la partie 3 nous étudierons les types de flexions dont les torseurs des éléments de réductions correspondent aux cas suivants:

	Flexion **pure plane**	Flexion **pure déviée**	Flexion **simple**
dans le repère $(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})$ de la section coupée			
${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ 0 & - \\ - & M_z \end{Bmatrix}$ ou ${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ - & M_y \\ 0 & - \end{Bmatrix}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Msin\alpha \\ 0 & Mcos\alpha \end{Bmatrix}$	${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ T_y & - \\ - & M_z \end{Bmatrix}$ ou ${}_G\begin{Bmatrix} 0 & - \\ - & M_y \\ T_z & - \end{Bmatrix}$
Exemple	Flexion 4 points 		Flexion trois points  



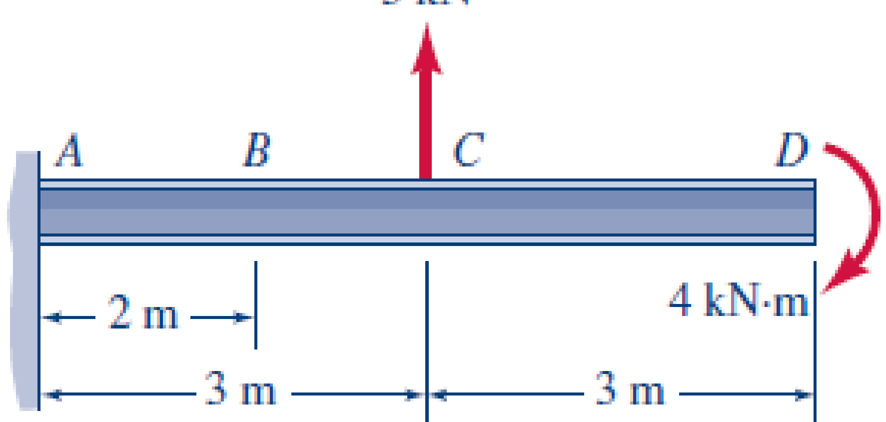
WOOCLAP

SÉANCE 1 SÉANCE 2



❑ Application directe: Exemple 1

Une poutre AD de longueur L est soudée à une structure au point A. La poutre est soumise à une force de 5 kN à une distance L/2 du point A et à une rotation suivant son sa plus longue dimension sous l'effet du moment M de 4 kN.m appliqué à son extrémité au point D.



1) Déterminer les éléments de réduction au point B situé à une distance L/3 du point A.

2) Déterminer les éléments de réduction tout au long de la poutre AD.



Application directe: Exemple 1

Résolution:

- Schématisation
  1) Représentation fibre moyenne
  2) Repère
  3) Sens positif
  4) Les liaisons
  5) Les forces de réaction

- Détermination des réactions:

  Application du PFS

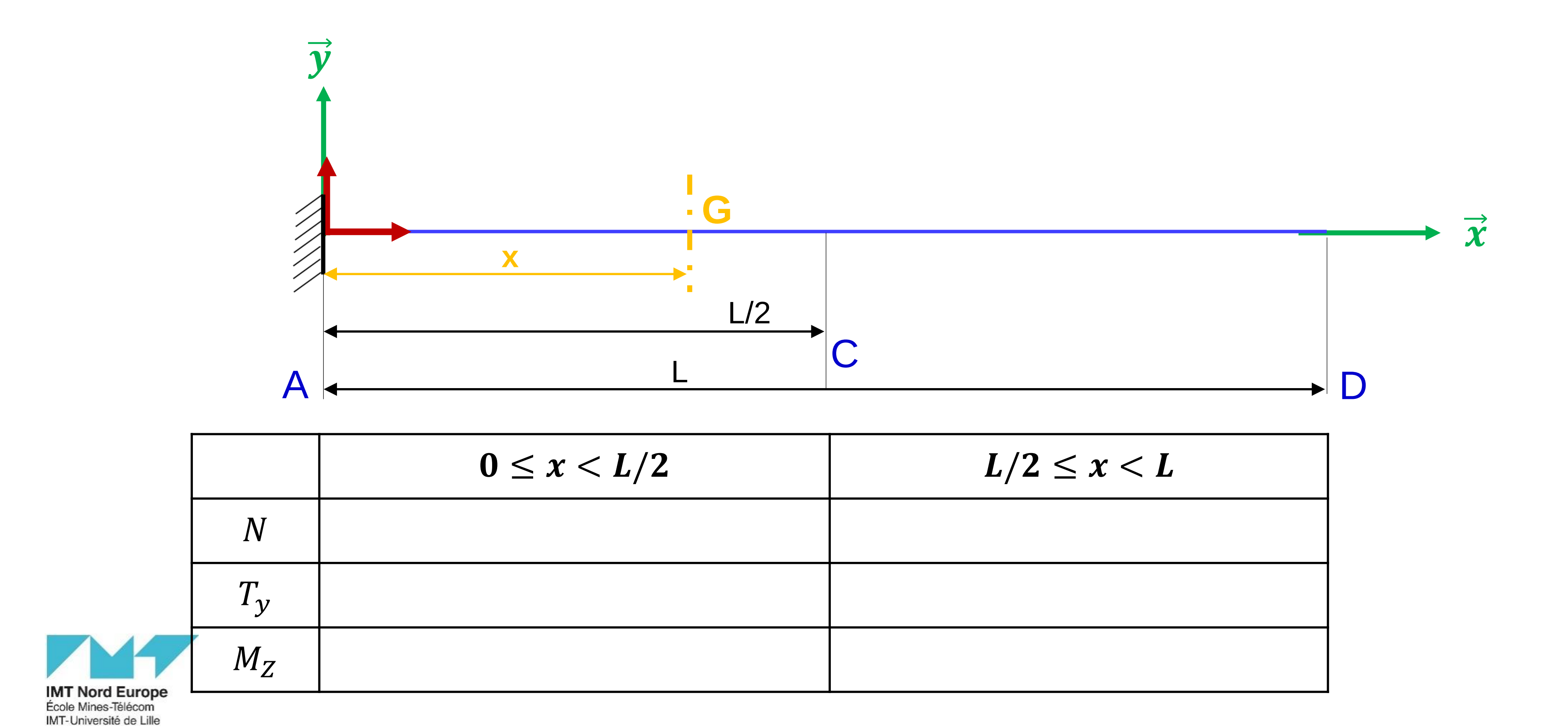


Application directe: Exemple 1

- Eléments de réduction en B



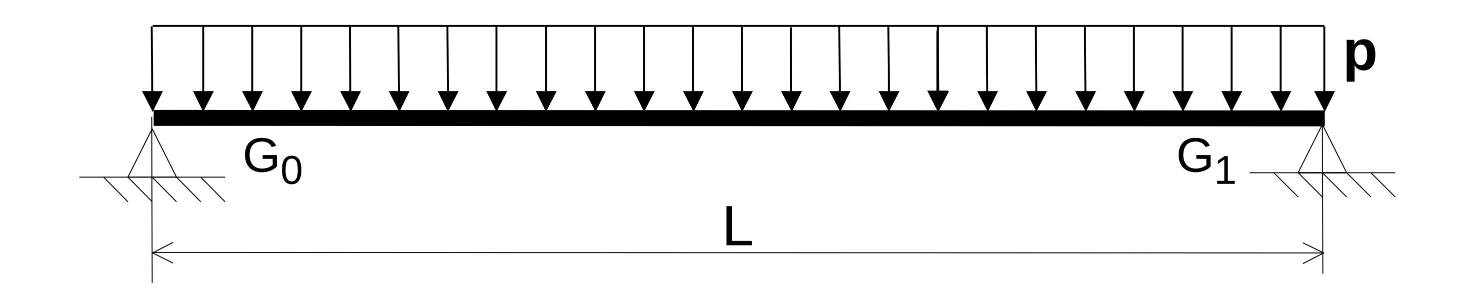
2) Déterminer les éléments de réduction tout au long de la poutre AD.



	$0 \leq x < L/2$	$L/2 \leq x < L$
N		
T_y		
M_Z		

- **Application directe: Exemple 2**

Une poutre droite, de longueur **L** et reposant sur deux appuis simples en G_0 et G_1, est soumise à une charge uniformément répartie de taux **p**.



Question: Calculer les éléments de réduction.



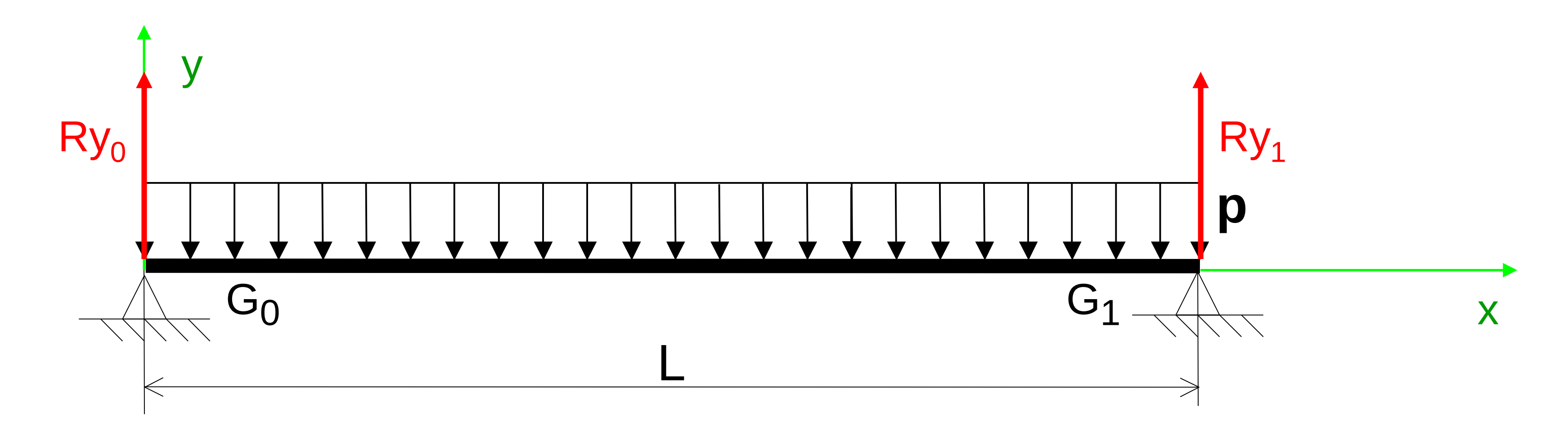
Démarche de résolution:

1) Schématisation:

   a. Définir le repère de travail

   b. Définir le sens positif des moments

   c. Représentation des forces de réaction et des moments au niveau des liaisons.



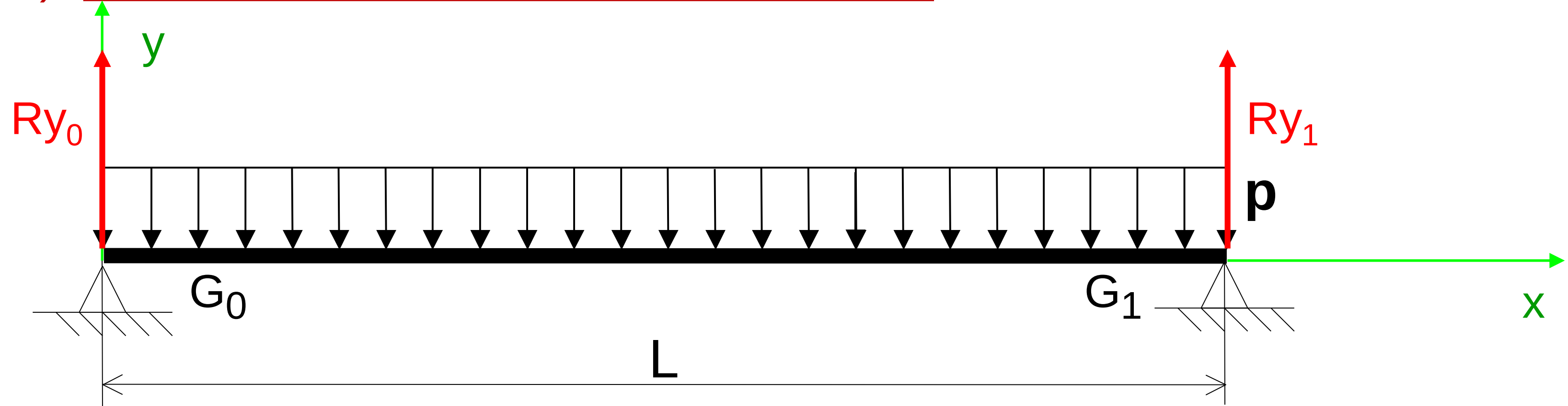


Application directe: Exemple 2

2) Résolution du problème statique:



2) Détermination des éléments de réduction:





Tracé des Diagrammes des éléments de réduction:

- **Diagramme de l'effort tranchant:**

- **Diagramme du moment de flexion:**



PARTIE 2

INTRODUCTION ET DÉMARCHE DE RÉSOLUTION

ETAPE 1 :

Schématisation d’un problème de RdM

Hypothèses de la RdM

ETAPE 2 : RÉSOLUTION PROBLÈME STATIQUE, *DÉTERMINER LES INCONNUES LIAISON*

ETAPE 3 : DIMENSIONNEMENT (ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE EN RdM)

A SAVOIR :

Equations d'équilibre d'une section

Propriétés des sections



6.1 Démarche générale de résolution d'un problème de RdM

I. Schématisation

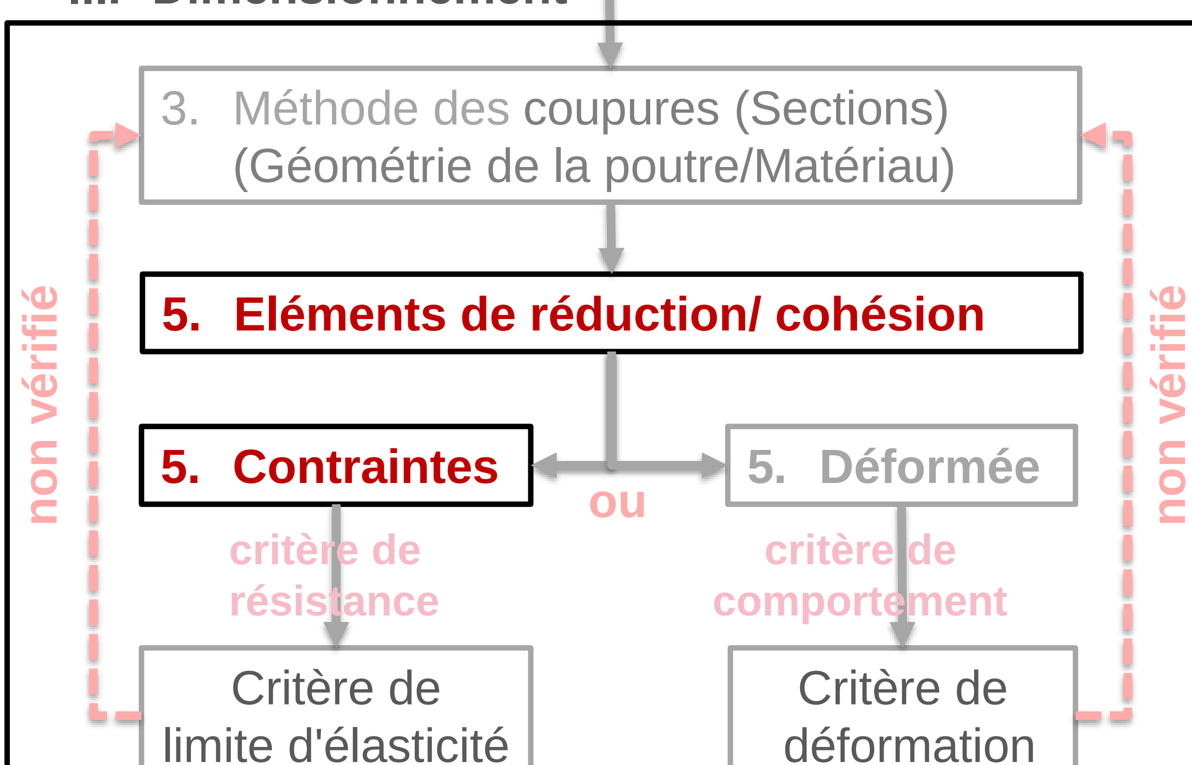
1. Composant (poutre ?)
2. Schématisation
3. Liaisons/sollicitations
4. Hypothèses de la RdM

II. Résolution du problème

Principe fondamental de la statique (PFS)

1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)

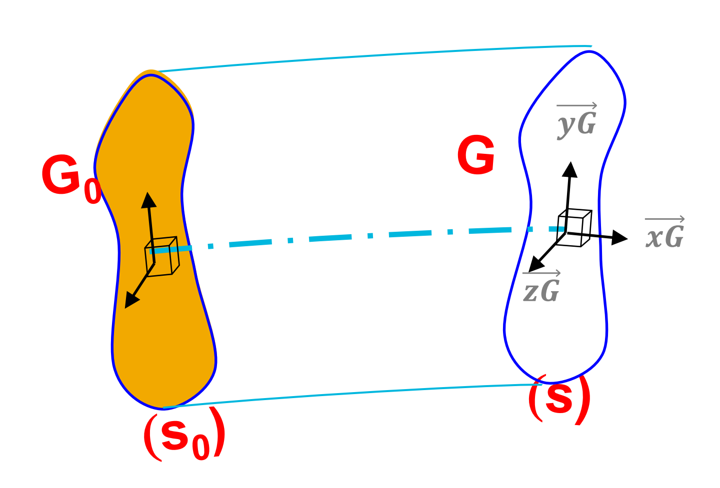
III. Dimensionnement





Si une poutre est en équilibre statique, toute partie de cette poutre est en équilibre . En particulier pour tout tronçon de gauche

Ce tronçon de gauche est soumis **aux actions des forces extérieures gauches**



$$_G\{\mathcal{T}_{ext/\mathbf{g}}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_g} = N\overrightarrow{x_G} + T_y\overrightarrow{y_G} + T_z\overrightarrow{z_G} \\ \overrightarrow{M_{G}}_g = C\overrightarrow{x_G} + M_y\overrightarrow{y_G} + M_z\overrightarrow{z_G} \end{cases}$$

aux actions des forces intérieures

"actions du tronçon de droite sur le tronçon de gauche au niveau de la section (Ω)" $_G\{\mathcal{T}_{\mathbf{d}/\mathbf{g}}\}$

Appliquons le PFS :

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/\mathbf{g}}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{\mathbf{d}/\mathbf{g}}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G} \quad \overrightarrow{y_G} \quad \overrightarrow{z_G})}$$



En chaque point M de la section (Ω), on exprime les actions intérieures par un vecteur contrainte $\overrightarrow{T(M,\overrightarrow{x_G})} = \sigma_n \overrightarrow{x_G} + \tau_y \overrightarrow{y_G} + \tau_z \overrightarrow{z_G}$.

$$_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = \begin{cases} \iint_{(\Omega)} \overrightarrow{T(M,\overrightarrow{x_G})} d\Omega = \iint_{(\Omega)} \left(\sigma_n \overrightarrow{x_G} + \tau_y \overrightarrow{y_G} + \tau_z \overrightarrow{z_G}\right) d\Omega \\ \iint_{(\Omega)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T(M,\overrightarrow{x_G})} d\Omega = \iint_{(\Omega)} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\sigma_n \overrightarrow{x_G} + \tau_y \overrightarrow{y_G} + \tau_z \overrightarrow{z_G}\right) d\Omega \end{cases}$$

Application du PFS fournit 6 équations :

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G} \quad \overrightarrow{y_G} \quad \overrightarrow{z_G})}$$



$$\iint_{(\Omega)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T(M,\overrightarrow{x_G})} d\Omega = \iint_{(\Omega)} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\sigma_n \overrightarrow{x_G} + \tau_y \overrightarrow{y_G} + \tau_z \overrightarrow{z_G}\right) d\Omega$$

Les points G et M sont des points de la section ⇨ $\overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G} \; \overrightarrow{y_G} \; \overrightarrow{z_G})}$

$$\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{T(M,\overrightarrow{x_G})} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{cases} y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y \\ z \cdot \sigma_n \\ -y \cdot \sigma_n \end{cases}$$

avec $\begin{bmatrix} \sigma_n = \sigma_{x_G x_G} \\ \tau_y = \sigma_{y_G x_G} \\ \tau_z = \sigma_{z_G x_G} \end{bmatrix}$

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/\mathbf{g}}\} + {_G\{\mathcal{T}_{\mathbf{d}/\mathbf{g}}\}} = {_G\left\{\begin{matrix} N + \iint_{(\Omega)} \sigma_n \, d\Omega = 0 & C + \iint_{(\Omega)} y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y \, d\Omega = 0 \\ T_y + \iint_{(\Omega)} \tau_y \, d\Omega = 0 & M_y + \iint_{(\Omega)} z \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \\ T_z + \iint_{(\Omega)} \tau_z \, d\Omega = 0 & M_z - \iint_{(\Omega)} y \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \end{matrix}\right\}}_{(\overrightarrow{x_G} \; \overrightarrow{y_G} \; \overrightarrow{z_G})}$$

$$ {}_{G}\{\mathcal{T}_{ext/\boldsymbol{g}}\} + {}_{G}\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{d}/\boldsymbol{g}}\} = {}_{G}\left\{ \begin{matrix} N + \iint_{(\Omega)} \sigma_n \, d\Omega = 0 & C + \iint_{(\Omega)} y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y \, d\Omega = 0 \\ T_y + \iint_{(\Omega)} \tau_y \, d\Omega = 0 & M_y + \iint_{(\Omega)} z \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \\ T_z + \iint_{(\Omega)} \tau_z \, d\Omega = 0 & M_z - \iint_{(\Omega)} y \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \end{matrix} \right\}_{(\overrightarrow{x_G} \; \overrightarrow{y_G} \; \overrightarrow{z_G})} $$

De ces équations, pour chaque sollicitation simple peuvent être extraites des **grandeurs intrinsèques aux sections** qui ne dépendent que de leur géométrie : **les moments quadratiques**

Ces moments quadratiques, peuvent donc être calculés de façon indépendante, elles sont des propriétés géométriques des surfaces

On peut les assimiler à une aptitude de la section à résister à la sollicitation




IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

PARTIE 2

INTRODUCTION ET DÉMARCHE DE RÉSOLUTION

<u>ETAPE 1 :</u>

- Schématisation d'un problème de RdM
- Hypothèses de la RdM

<u>ETAPE 2 :</u> RÉSOLUTION PROBLÈME STATIQUE, *DÉTERMINER LES INCONNUES LIAISON*

<u>ETAPE 3 :</u> DIMENSIONNEMENT (ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE EN RdM)

A SAVOIR :

- Equations d'équilibre d'une section





5. Équations d'équilibre en RdM

5.6 Torseur des éléments de réduction/ sollicitations simples

$$\underset{G}{\{\mathcal{T}_{ext/g}\}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{M_{ext}} \end{Bmatrix}} = \underset{G}{\begin{Bmatrix} N & Mx \\ Ty & My \\ Tz & Mz \end{Bmatrix}}_{(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

- **Selon les valeurs prises par la résultante et le moment** du torseur des éléments de réduction, on identifie **les différentes sollicitations simples** auxquelles les poutres sont soumises.

Éléments de réduction

N	T_y ou T_z	M_x	$M_y$ou M_z	Identification de la sollicitation
≠0	=0	=0	=0	**N<0** Traction **N>0** Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0 =0 =0 ≠0	=0	=0 ≠0 ≠0 =0	Flexion simple



Cas de la flexion simple (ou pure) :

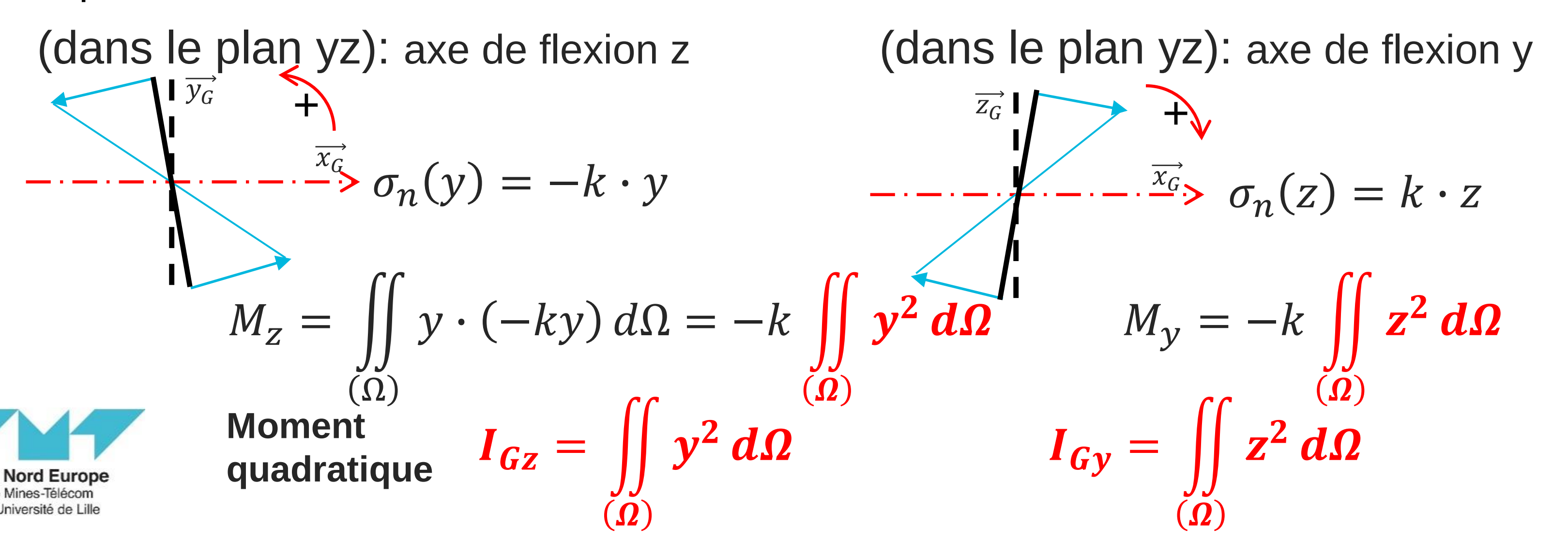
$$_G\{\mathcal{T}_{ext/\boldsymbol{g}}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{\boldsymbol{Fint}\rightarrow(\boldsymbol{\Omega})}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y + \iint_{(\Omega)} \tau_y \, d\Omega = 0 & 0 \\ 0 & M_z - \iint_{(\Omega)} y \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G} \ \overrightarrow{y_G} \ \overrightarrow{z_G})}$$

(Elts Réduction): (Efforts intérieurs):

(ex: moment de flexion M_z autour de l'axe z)

Hypothèse 9 : Hypothèse Barré de Saint Venant (flexion)

La contrainte normale en tout point M d'une section droite d'une poutre fléchie en flexion simple, est **proportionnelle à la distance qui sépare le point M de l'axe neutre**, axe qui passe par le centre d'inertie de la section.



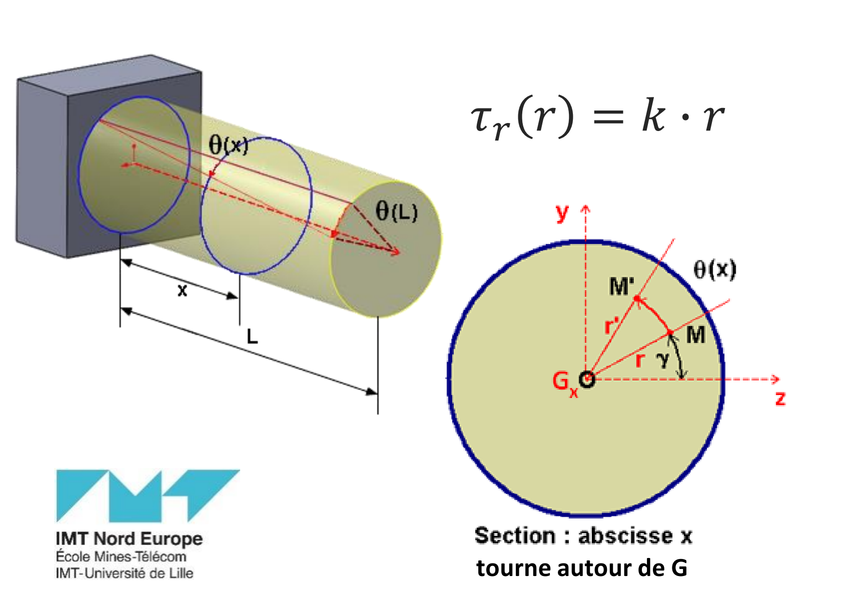
Cas de la torsion pure (cas des poutres cylindriques) :

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint\to(\Omega)}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_x + \iint_{(\Omega)} y\cdot\tau_z - z\cdot\tau_y \, d\Omega = 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$$

(Elts Réduction): (Efforts intérieurs):

Hypothèse 7 : Hypothèse de Navier Bernouilli

Toute **section plane avant déformation** se transforme en une **section plane après déformation**. Toutes **les sections (Ω)** qui constituent la poutre **restent perpendiculaires à la fibre moyenne après déformation**.



$$\tau_r(r) = k\cdot r$$

$$M_x + \iint_{(\Omega)} y\cdot\tau_z - z\cdot\tau_y \, d\Omega = 0$$

$$M_x + \iint_{(\Omega)} r\cdot\tau_r \, d\Omega = 0$$

$$M_x = -k\iint_{(\Omega)} r^2\, d\Omega = -k\iint_{(\Omega)} y^2 + z^2\, d\Omega$$

$$I_G = \iint_{(\Omega)} r^2\, d\Omega = I_{Gz} + I_{Gy}$$

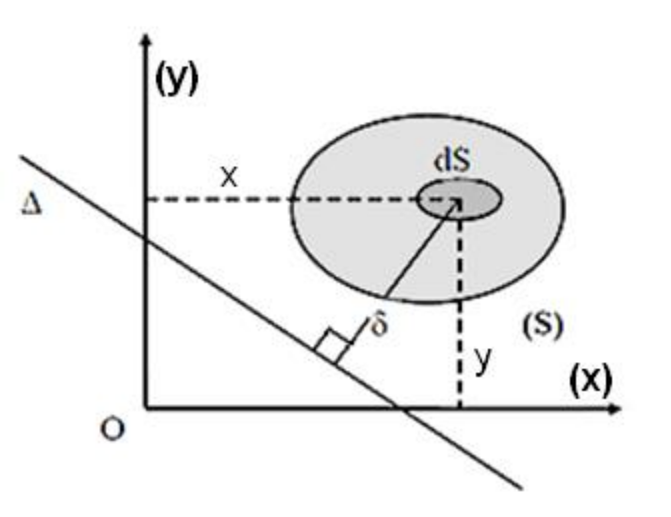
I_G Moment polaire d'inertie

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

7.3 Moment quadratique d'une section

Généralisation

Soit la section (S) et un axe Δ représentés dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$



On appelle moment quadratique (d'inertie) d'une section (S) par rapport l'axe Δ la quantité notée $I_\Delta(S)$ définie par :

$$I_\Delta(S) = \iint_{(S)} \delta^2 \, dS \qquad I_\Delta(S) > 0$$

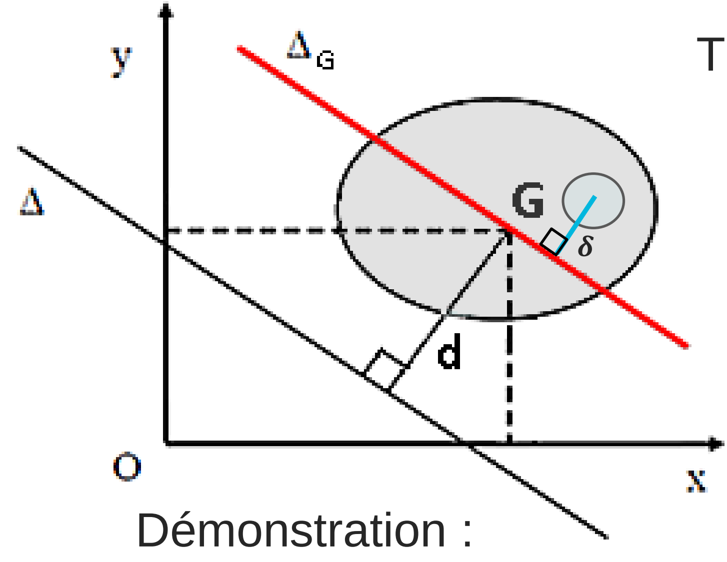
Quelques propriétés :

l'axe Δ confondu avec $(O, \vec{x})$ alors $\delta = y$ et : $I_{Ox}(S) = \iint_{(S)} y^2 \, dS$

l'axe Δ confondu avec $(O, \vec{y})$ alors $\delta = x$ et : $I_{Oy}(S) = \iint_{(S)} x^2 \, dS$



Généralisation



Théorème de Huygens :

l'axe Δ_G passe par le centre de gravité G de (S)
l'axe Δ est parallèle à Δ_G distant de d

$$I_\Delta(S) = \boldsymbol{I_{\Delta_G}(S)} + d^2 S$$

Rq : $I_\Delta(S) > I_{\Delta_G}(S)$

Démonstration :

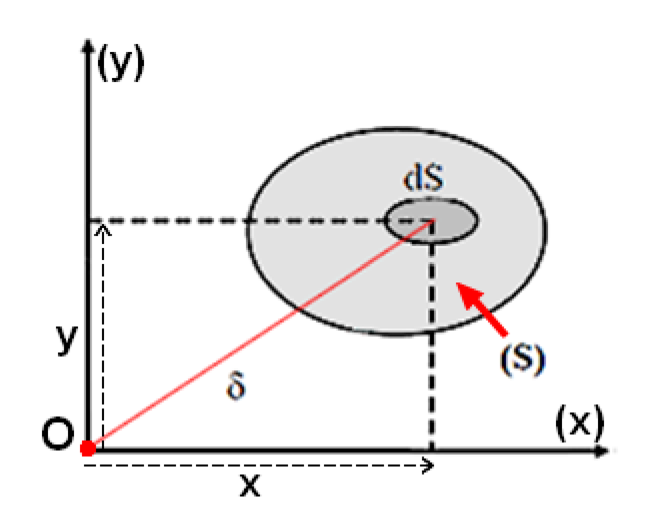
$$I_\Delta(S) = \iint_{(S)} (d+\delta)^2\, dS = \iint_{(S)} (d^2 + \delta^2 + 2d\delta)\, dS$$

$$I_\Delta(S) = d^2 S + \underbrace{\iint_{(S)} \delta^2\, dS}_{I_{\Delta_G}(S)} + 2d \iint_{(S)} \delta\, dS$$

Moment statique de (S) par rapport à Δ_G = 0

7.6 Moment polaire d'une section

Soit la section (S) et un point 0 représentés dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$



On appelle moment polaire quadratique (d'inertie) d'une section (S) par rapport à un point O la quantité notée $I_O(S)$ définie par :

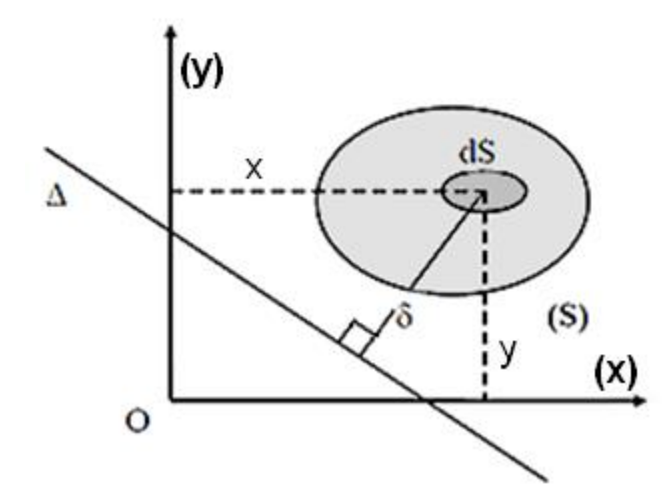
$$I_O(S) = \iint_{(S)} \delta^2 dS$$

Quelques propriétés :

$$I_O(S) = I_{Ox}(S) + I_{Oy}(S) = \iint_{(S)} (x^2 + y^2) dS$$



7.7 Moment statique d'une section



On appelle moment statique de l'aire (S) par rapport à l'axe Δ la quantité notée $m_\Delta(S)$ définie par :

$$m_\Delta(S) = \iint_{(S)} \delta \, dS$$

Quelques propriétés :

l'axe Δ passe par l'origine du repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ $\quad m_\Delta(S) = \iint_{(S)} \delta \, dS = \overline{OG} \cdot S$

l'axe Δ confondu avec $(O, \vec{x}\,)$ alors $\delta = y$ et : $\quad m_\Delta(S) = \iint_{(S)} y \, dS = y_G \cdot S$

l'axe Δ confondu avec $(O, \vec{y}\,)$ alors $\delta = x$ et : $\quad m_\Delta(S) = \iint_{(S)} x \, dS = x_G \cdot S$

Si l'axe Δ passe par le centre de gravité de la section $\quad m_\Delta(S) = 0$



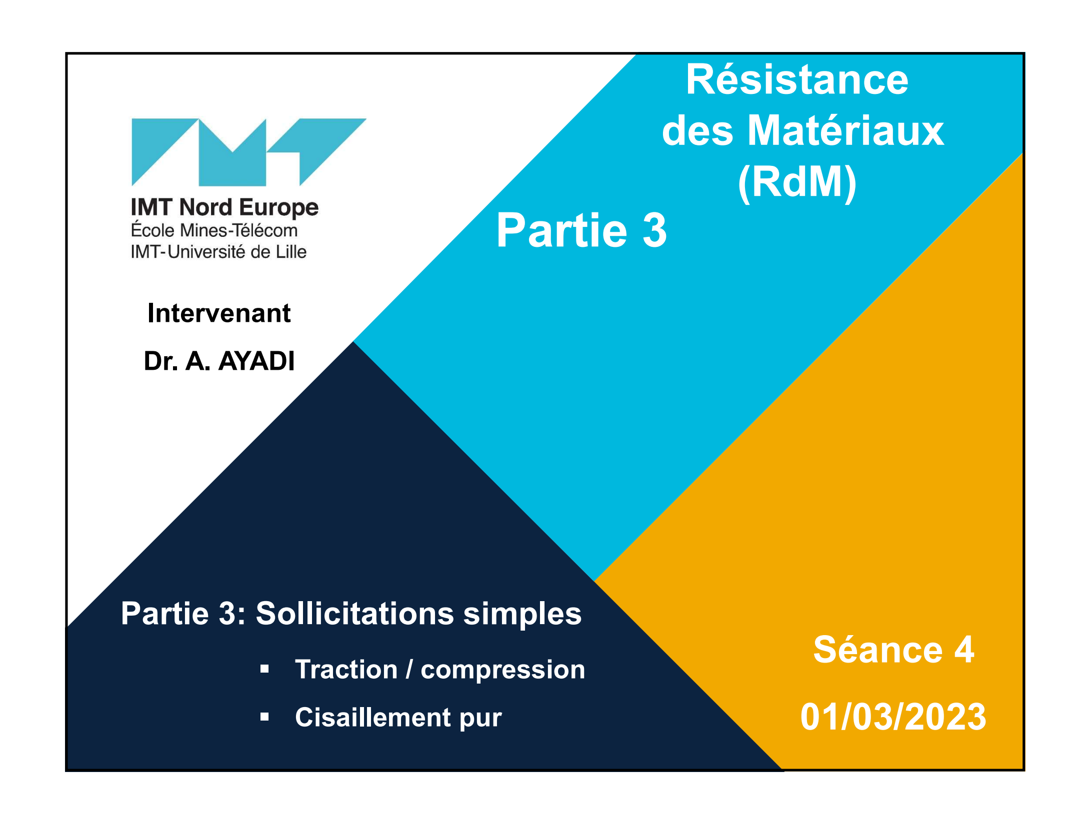
7.8 Moments quadratiques de sections simples

Quelques exemples : Sections présentant des symétries

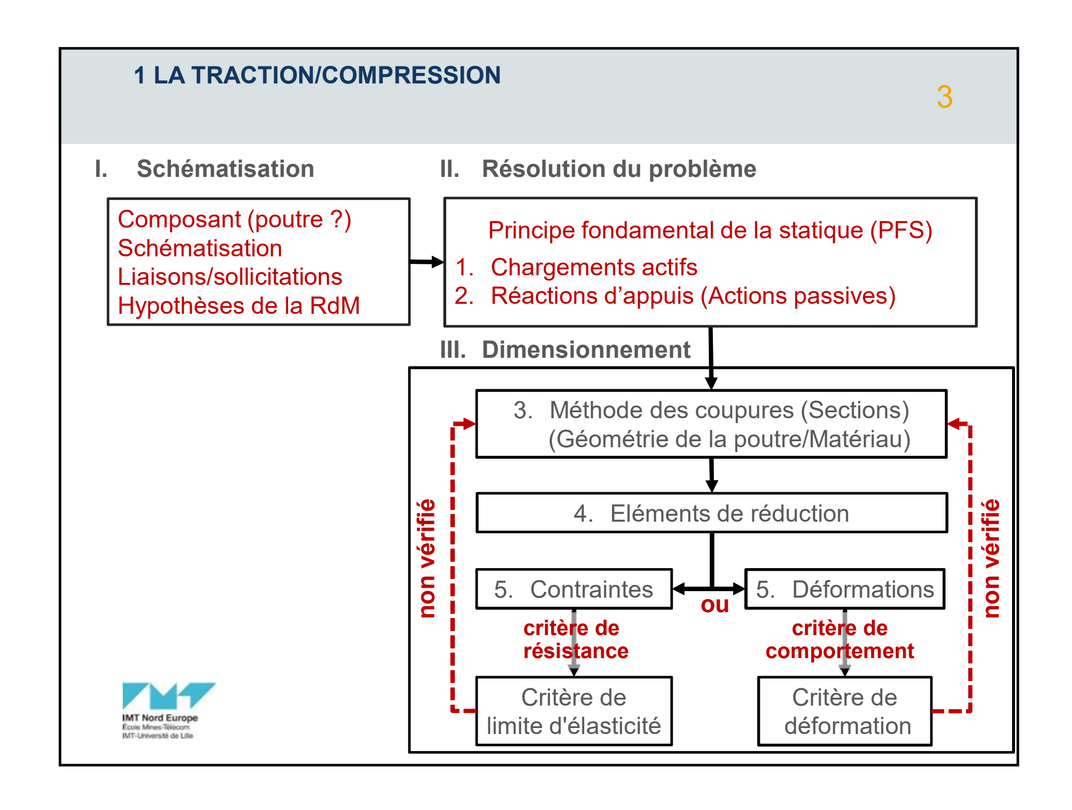
Surface				
IGz (mm⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{64}$
I_G (mm⁴)	$\frac{bh^3+hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{32}$

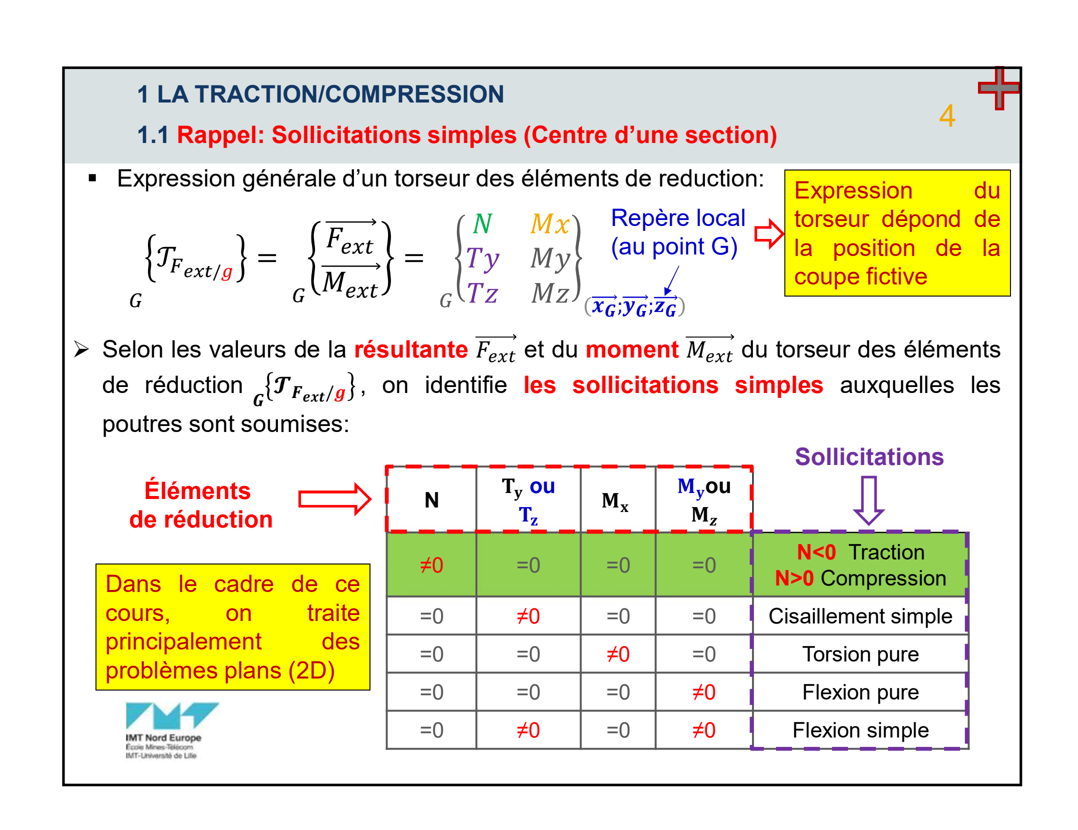
Surface					
IGz (mm⁴)	$\frac{bh^3-b_ih_i^3}{12}$	$\frac{a^4-a_i^4}{12}$	IGz (mm⁴)	$\frac{bh^3-(b-w)(h-2e)^3}{12}$	$\frac{bh^3-(b-w)(h-2e)^3}{12}$
I_G (mm⁴)	$\frac{bh^3+hb^3}{12}-\frac{b_ih_i^3+h_ib_i^3}{12}$	$\frac{a^4-a_i^4}{6}$	IGY (mm⁴)	$\frac{2eb^3-(h-2e)w^3}{12}$	



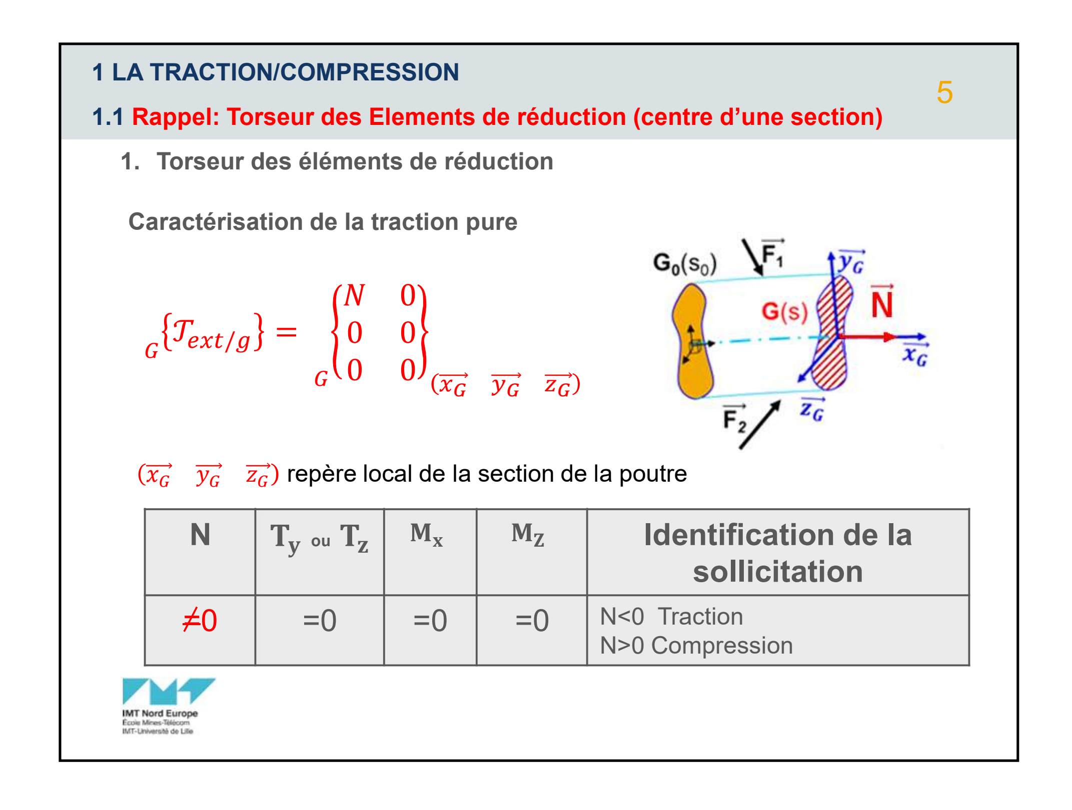

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Intervenant
Dr. A. AYADI
Résistance
des Matériaux
(RdM)
Partie 3
Partie 3: Sollicitations simples
Traction / compression
Cisaillement pur
Séance 4
01/03/2023


PARTIE 3
1 LA TRACTION / COMPRESSION
2 LE CISAILLEMENT PUR
3 LA TORSION
4 LA FLEXION
La flexion pure
La flexion simple
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

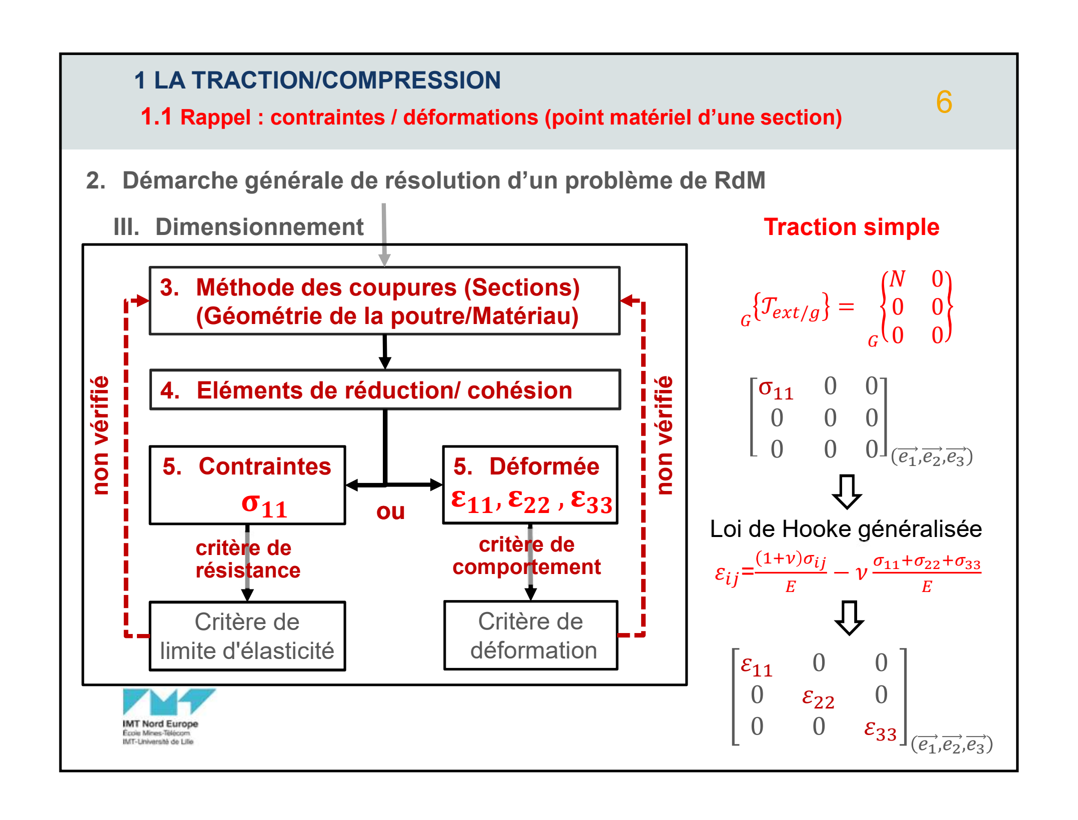




N	T_y ou T_z	M_x	M_y ou M_z	Sollicitations
≠0	=0	=0	=0	N<0 Traction N>0 Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0	=0	≠0	Flexion simple



N	T_y ou T_z	M_x	M_z	Identification de la sollicitation
≠0	=0	=0	=0	N<0 Traction N>0 Compression



1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.1 Rappel: Equilibre d'une section (Relations entre efforts externes au centre d'une section et états de contraintes à un point quelconque de la section)

7

3. Équations d'équilibre dans le cas de la traction pure

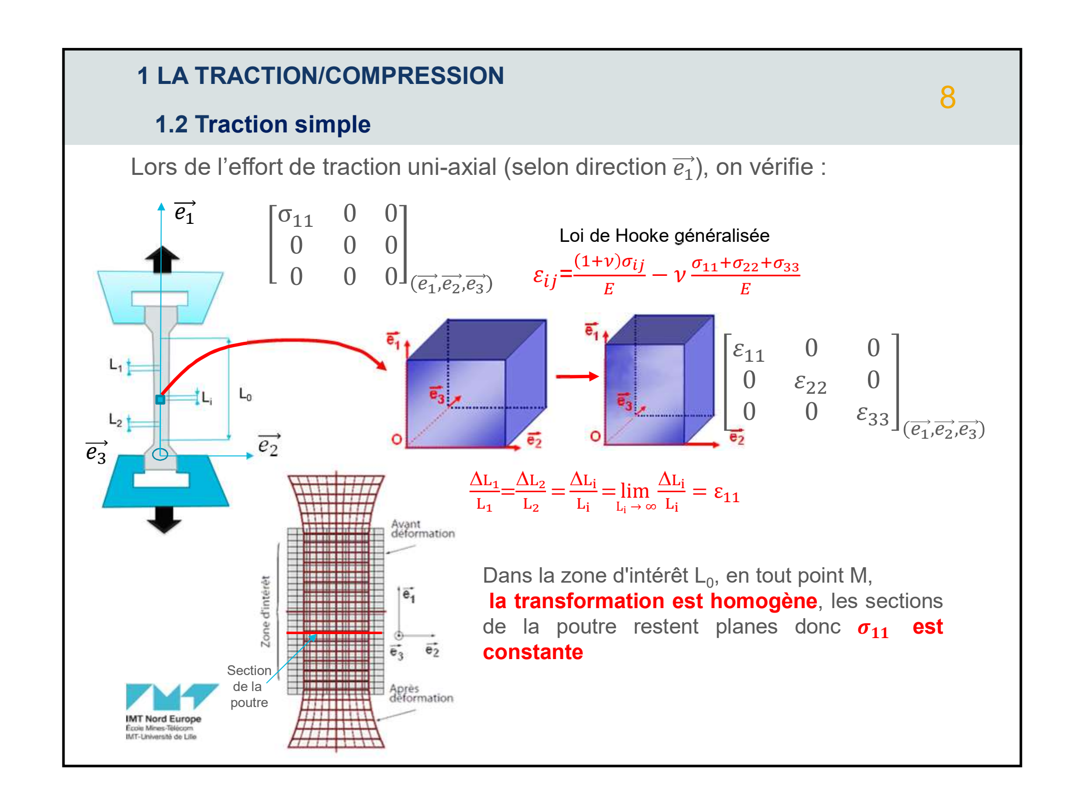
Composantes du torseur des éléments de réduction

N	T_y ou T_z	M_x	M_z	Identification de la sollicitation
≠0	=0	=0	=0	N<0 Traction N>0 Compression

Expression des équations d'équilibre de la section coupée

$$\left.\begin{array}{l} {}_G\{\mathcal{T}_{Fex\ /g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint\to(\Omega)}\} \\ {}_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d\to g}\} \end{array}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{ll} N + \iint_{(\Omega)} \sigma_n\, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y\cdot\tau_z - z\cdot\tau_y\, d\Omega = 0 \\ \iint_{(\Omega)} \tau_y\, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} z\cdot\sigma_n\, d\Omega = 0 \\ \iint_{(\Omega)} \tau_z\, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y\cdot\sigma_n\, d\Omega = 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x_G}\ \vec{y_G}\ \vec{z_G})}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.3 Relation contrainte / déformation

9

Equations d'équilibre (traction **uni-axiale**)

Relation de la résultante du torseur d'équilibre : $\vec{e_1}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

$$N + \iint_{(\Omega)} \sigma_{11}\, d\Omega = 0 \Longrightarrow N + \sigma_{11} \iint_{(\Omega)} d\Omega = 0$$

$$\sigma_{11} = \frac{-N}{S} = \frac{F}{S}$$

Relation de moment du torseur d'équilibre résolu en G : $\vec{e_3}$

$$\iint_{(\Omega)} \overrightarrow{GM} \wedge (\sigma_{11}\vec{e_1})\, d\Omega = \begin{cases} \iint_{(\Omega)} z \cdot \sigma_{11}\, d\Omega = \sigma_{11} \underbrace{\iint_{(\Omega)} z\, d\Omega}_{=0} = 0 \\ \iint_{(\Omega)} y \cdot \sigma_{11}\, d\Omega = \sigma_{11} \underbrace{\iint_{(\Omega)} y\, d\Omega}_{=0} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})}$$

Moments statiques/G nuls

M, $\vec{e_3}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_1}$, σ_{11}, G, $\vec{y_G}$, $\vec{x_G}$, $\vec{z_G}$, (Ω)

Section reste plane
$(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ et $(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})$
sont identiques

Loi de Hooke uni-axiale

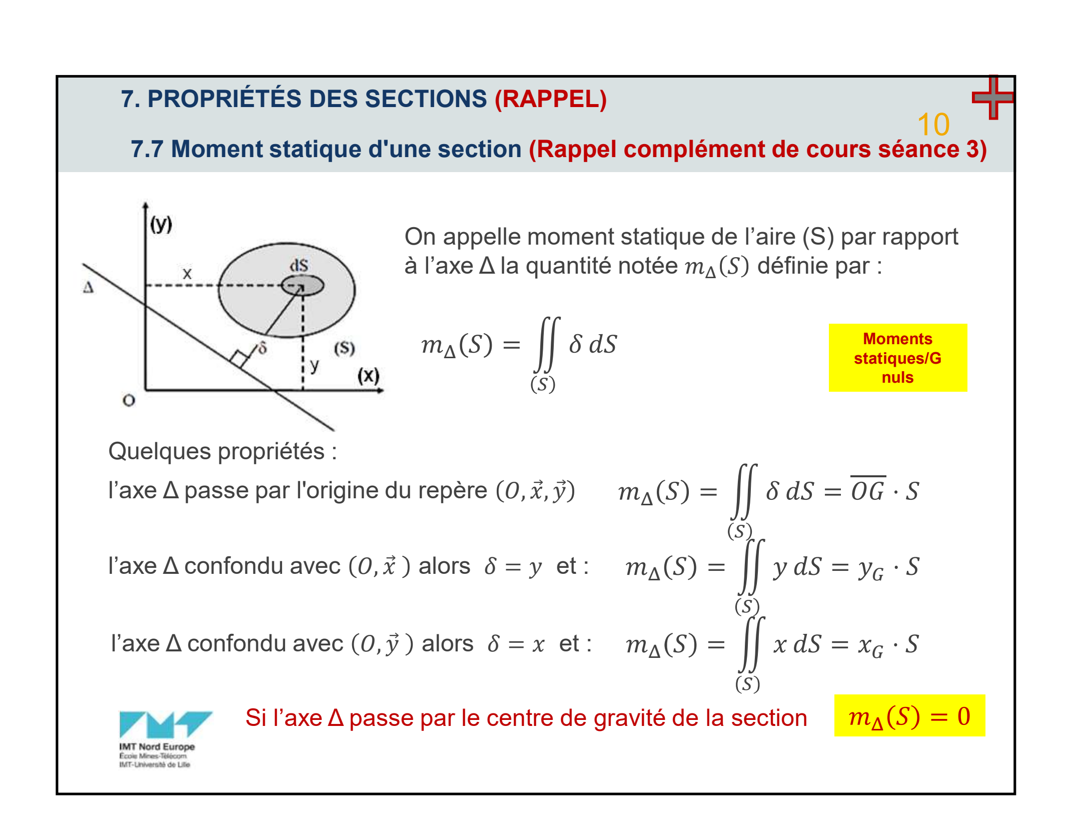
$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$$

Bilan traction uni-axiale $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{F}{S} \\ \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \end{cases}$$

Avec :
E : module d'Young du matériau (ou module d'élasticité longitudinale)
ν : coefficient de Poisson du matériau
N : effort normal (N=-F)

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

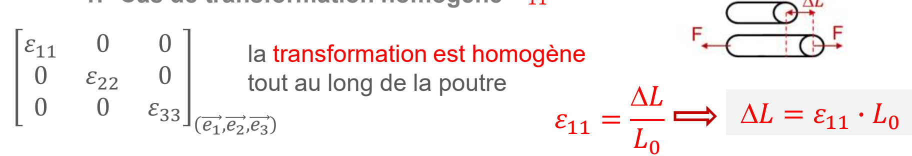


1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.4 Relation: déformation (ε_{11}) / allongement (ΔL)

11

1. **Cas de transformation homogène** ε_{11} est constant



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

la transformation est homogène tout au long de la poutre

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L_0} \Longrightarrow \Delta L = \varepsilon_{11} \cdot L_0$$

2. **Cas de la transformation hétérogène:**

Exemple 1: Poutre conique de Longueur initiale L_0

Objectif 1: Determiner l'allongement ΔL de la poutre et le déplacement u?

ε_{11} varie en fonction de l'abscisse x le long de la poutre (**section variable**). On isole un tronçon de longueur dx, situé entre les sections d'abscisse x et x+dx. Soit u(x) le déplacement de la section d'abscisse x lors de la transformation

$$u(x+dx) = u(x) + du(x)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}(x) = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}(x)dx = du$$

$$\Rightarrow \int_0^{L_0} \varepsilon_{11}(x)dx = \int_0^{L_0} du = u(L_0) - u(0) = \Delta L$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

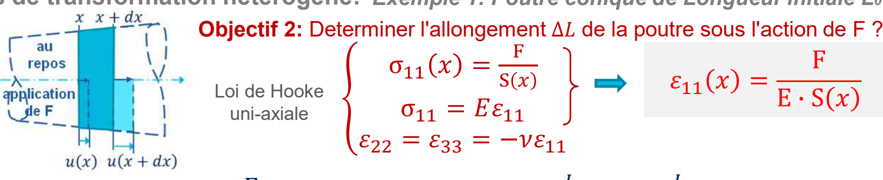
1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.4 Relation: déformation (ε_{11}) / allongement (ΔL)

12

Cas de transformation hétérogène: *Exemple 1: Poutre conique de Longueur initiale L_0*

Objectif 2: Determiner l'allongement ΔL de la poutre sous l'action de F ?



Loi de Hooke uni-axiale

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x) = \frac{F}{S(x)} \\ \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_{11}(x) = \frac{F}{E \cdot S(x)}$$

$$\varepsilon_{11}(x)dx = du \leftrightarrow \frac{F}{E \cdot S(x)}dx = du \Rightarrow \Delta L = \int_0^{L_0} du = \int_0^{L_0} \varepsilon_{11}(x)dx$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int_0^{L_0} \frac{F}{E \cdot S(x)}dx = \frac{F}{E}\int_0^{L_0} \frac{1}{S(x)}dx = \frac{F}{\pi \cdot E}\int_0^{L_0} \frac{1}{r(x)^2}dx$$

$$r(x) = r_0 + x\frac{r_{L_0} - r_0}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \frac{F}{\pi \cdot E}\int_0^{L_0} \frac{L_0^2}{\left(L_0 r_0 + x(r_{L_0} - r_0)\right)^2}dx$$

Changement de variable:
$y(x) = L_0 * r(x)$
$y(x) = L_0 r_0 + x(r_{L_0} - r_0)$
$dy = (r_{L_0} - r_0)dx$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{F \cdot L_0^2}{\pi \cdot E}\int_{L_0 r_0}^{L_0 r_{L_0}} \frac{1}{y^2}\frac{dy}{(r_{L_0} - r_0)} = \frac{F \cdot L_0^2}{\pi \cdot E(r_{L_0} - r_0)}\left[-\frac{1}{y}\right]_{L_0 r_0}^{L_0 r_{L_0}}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{F \cdot L_0}{\pi \cdot E(r_{L_0} \cdot r_0)}$$

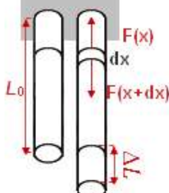
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.4 Relation déformation/allongement

13

Cas de transformation hétérogène : Exemple 2 *poutre de section constante*
Longueur initiale L_0 ***charge variable***



Déterminer l'allongement ΔL de la poutre sous l'action de son poids propre ?

Loi de Hooke uni-axiale
$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{11}(x)=\frac{F(x)}{S}\\ \sigma_{11}=E\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\nu\varepsilon_{11}\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{11}(x)=\frac{F(x)}{E\cdot S}$$

$$\varepsilon_{11}(x)dx=du \leftrightarrow \frac{F(x)}{E\cdot S}dx=du \Rightarrow \Delta L=\int_0^{L_0}du=\int_0^{L_0}\varepsilon_{11}(x)dx$$

$$\Rightarrow \Delta L=\int_0^{L_0}\frac{F(x)}{E\cdot S}dx=\frac{1}{ES}\int_0^{L_0}F(x)dx \qquad F(x)=\rho gS(L_0-x)$$

$$\Rightarrow \Delta L=\frac{\rho gS}{ES}\int_0^{L_0}(L_0-x)dx=\frac{\rho g}{E}\int_0^{L_0}(L_0-x)dx=\frac{\rho g}{E}\left[L_0x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{L_0}$$

$$\Delta L=\frac{\rho g}{E}\cdot\frac{L_0^2}{2}=\frac{\rho gSL_0}{SE}\cdot\frac{L_0}{2}=\frac{Poids\ poutre}{SE}\cdot\frac{L_0}{2} \Rightarrow \Delta L=\frac{Poids\ poutre}{SE}\cdot\frac{L_0}{2}$$



1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.5 Dimensionnement

14

Critère de dimensionnement

Pour le dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :
– un critère en contrainte
– un critère en déplacement

➢ **Critère de résistance** — Critère de limite d'élasticité

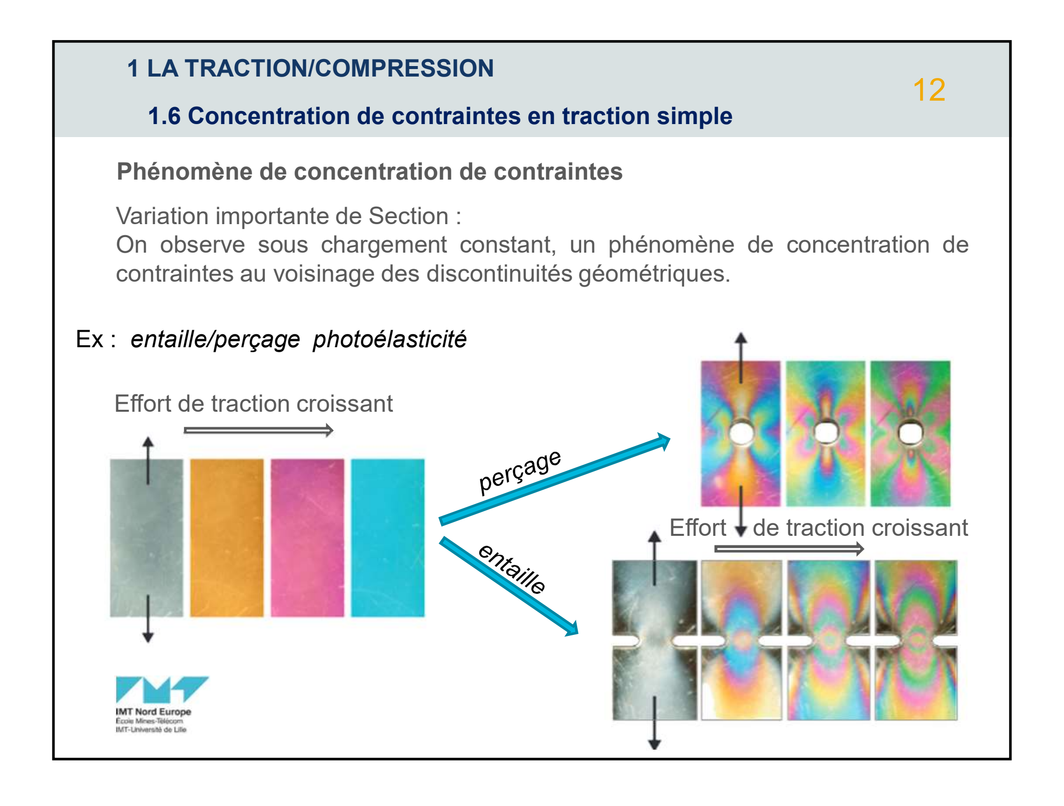
$$\sigma_{11}<\sigma_u=\frac{R_p}{s}$$ avec $s=s_m.s_e.s_f>1$

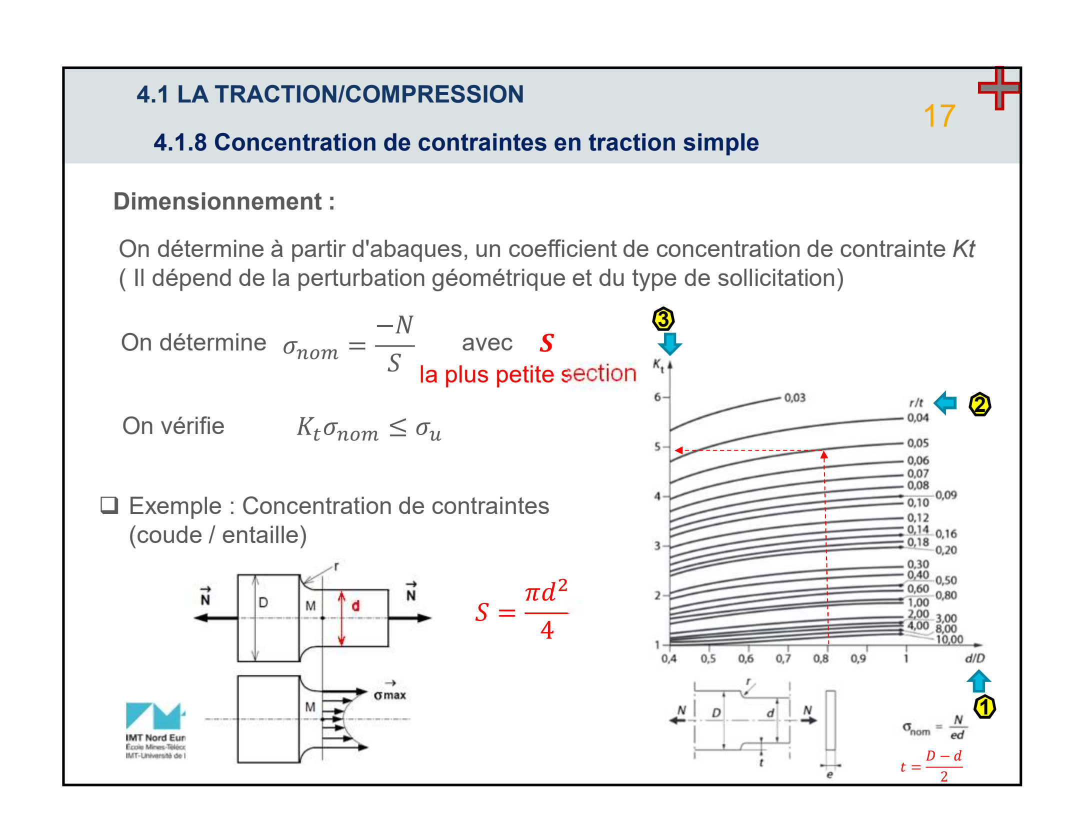
➢ **Critère de comportement** — Critère de déformation

Le déplacement en un point P de la poutre ne doit pas excéder une valeur maximale

$$u(P)<\frac{u_{lim}}{s'}$$ avec $s'>1$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


1 LA TRACTION/COMPRESSION
1.6 Concentration de contraintes en traction simple
12
Phénomène de concentration de contraintes
Variation importante de Section :
On observe sous chargement constant, un phénomène de concentration de contraintes au voisinage des discontinuités géométriques.
Ex : entaille/perçage photoélasticité
Effort de traction croissant
perçage
entaille
Effort de traction croissant
IMT Nord Europe


4.1 LA TRACTION/COMPRESSION
4.1.8 Concentration de contraintes en traction simple
17
Dimensionnement :
On détermine à partir d'abaques, un coefficient de concentration de contrainte Kt
(Il dépend de la perturbation géométrique et du type de sollicitation)
On détermine $\sigma_{nom} = \frac{-N}{S}$ avec S la plus petite section
On vérifie $K_t \sigma_{nom} \leq \sigma_u$
Exemple : Concentration de contraintes (coude / entaille)
$S = \frac{\pi d^2}{4}$
D
M
d
r
N
σmax
K_t
r/t
d/D
$\sigma_{nom} = \frac{N}{ed}$
$t = \frac{D-d}{2}$
IMT Nord Europe

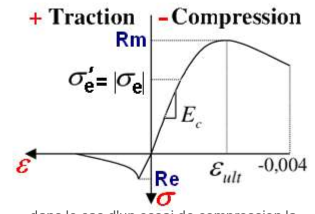
1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.7 La compression simple

18

Compression uni axiale

Les résultats établis pour la traction sont transposables à la compression simple



dans le cas d'un essai de compression la courbe peut être représentée inversée / celle d'un essai de traction (cas de la figure)

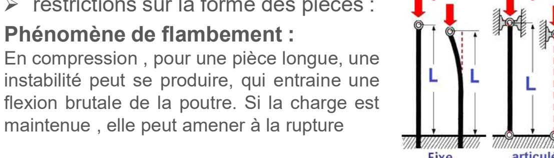
Sous certaines conditions :

- adaptations de signes :

Loi de Hooke: $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ $\quad \sigma_{11} < 0$ et $\varepsilon_{11} < 0$

- restrictions sur la forme des pièces :

Phénomène de flambement :
En compression , pour une pièce longue, une instabilité peut se produire, qui entraine une flexion brutale de la poutre. Si la charge est maintenue , elle peut amener à la rupture



Dimensionnement :

- on s'assure que l'effort de compression reste inférieur à la **charge critique de flambement** (abordé en M1) (cf. théorie d'Euler)
- Si absence de risque de flambement : on vérifiera $\sigma_{11} < \sigma_{u'} = \frac{\sigma_{e'}}{s'}$

$(\sigma_{e'} = |\sigma_e|$ contrainte utile en compression)
s' coefficient de sécurité

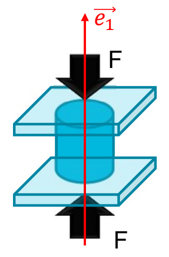


1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.7 La compression simple

19

Dans le cas de la caractérisation d'un matériau à la compression, (ex: Béton cas du génie civil), il est d'usage de caractériser déformations et contraintes à partir de leur valeur absolue, la confusion n'étant plus possible.



En considérant $\sigma_{11} \rightarrow \|\sigma_{11}\|$
$\varepsilon_{11} \rightarrow \|\varepsilon_{11}\|$
(Cas du génie civil)

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = +\nu\varepsilon_{11} \\ \sigma_{11} = -\frac{F}{S} \end{cases}$$

Avec :
E : module d'Young du matériau (ou module d'élasticité longitudinale)
ν : coefficient de Poisson du matériau
N : effort normal (N=||F||) (éléments de réduction)

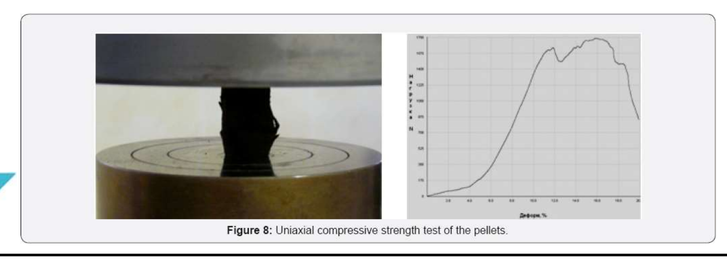
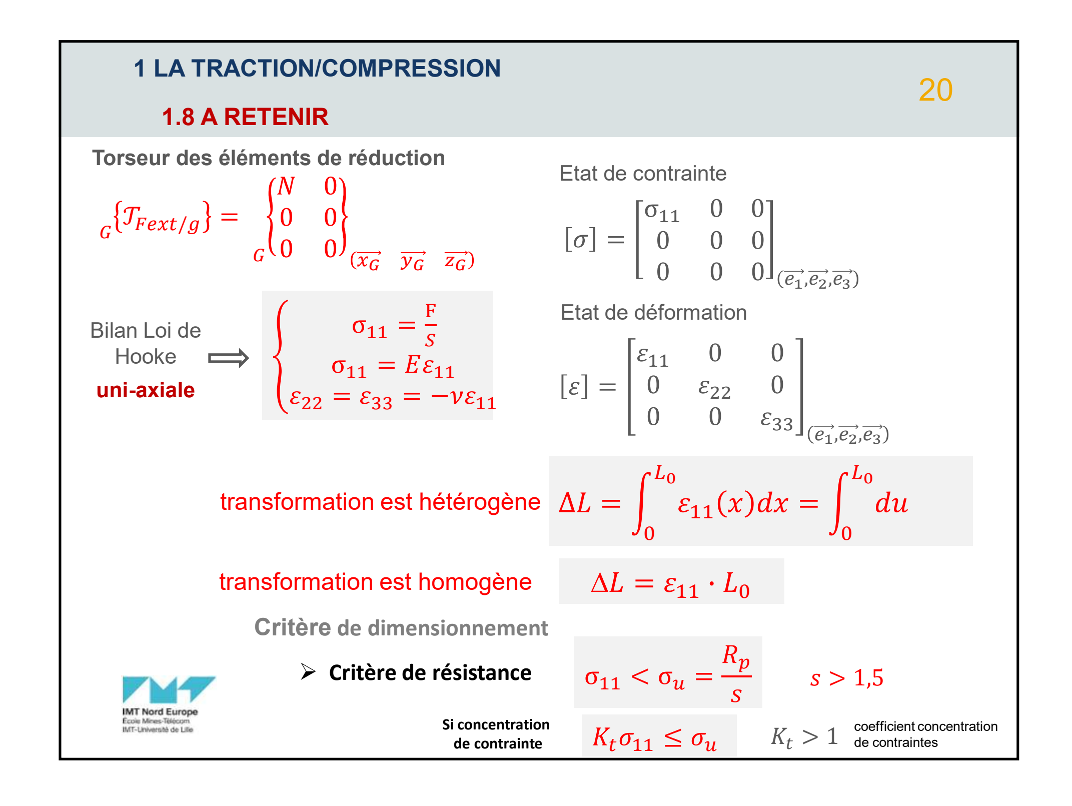
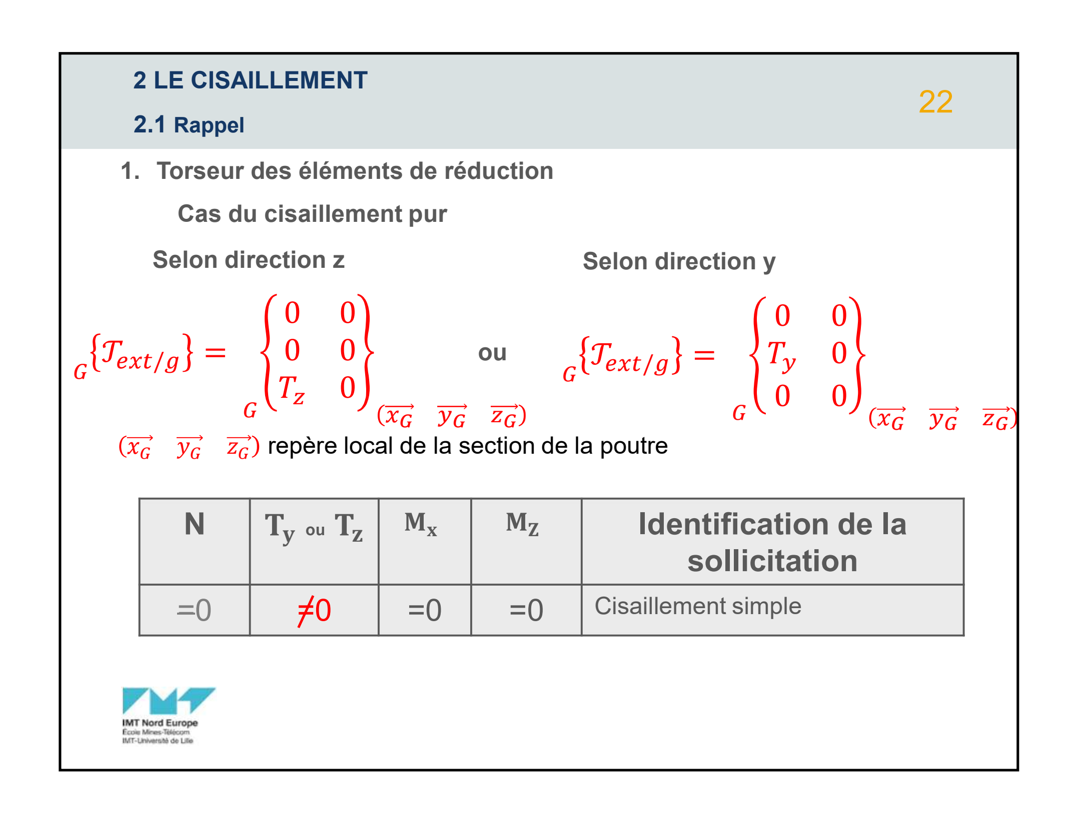


Figure 8: Uniaxial compressive strength test of the pellets.

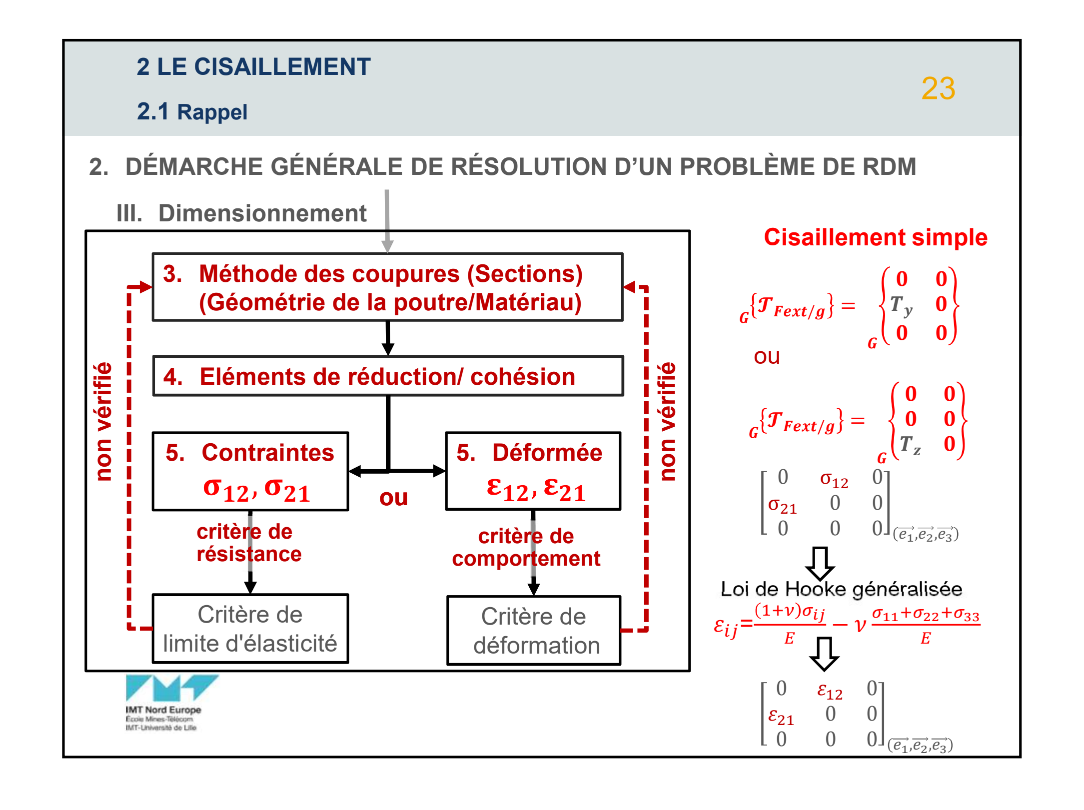
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


1 LA TRACTION/COMPRESSION
20
1.8 A RETENIR
Torseur des éléments de réduction
$_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$
Etat de contrainte
$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$
Bilan Loi de Hooke
uni-axiale
$\sigma_{11} = \frac{F}{S}$
$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$
$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$
Etat de déformation
$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}$
transformation est hétérogène
$\Delta L = \int_0^{L_0} \varepsilon_{11}(x)dx = \int_0^{L_0} du$
transformation est homogène
$\Delta L = \varepsilon_{11} \cdot L_0$
Critère de dimensionnement
Critère de résistance
$\sigma_{11} < \sigma_u = \frac{R_p}{s}$
$s > 1,5$
Si concentration de contrainte
$K_t\sigma_{11} \leq \sigma_u$
$K_t > 1$
coefficient concentration de contraintes
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


PARTIE 3
1 LA TRACTION / COMPRESSION
2 LE CISAILLEMENT PUR
3 LA TORSION
4 LA FLEXION
• La flexion pure
• La flexion simple
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



2 LE CISAILLEMENT
2.1 Rappel
22
1. Torseur des éléments de réduction
Cas du cisaillement pur
Selon direction z
Selon direction y
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x_G}\ \vec{y_G}\ \vec{z_G})}$ ou $_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x_G}\ \vec{y_G}\ \vec{z_G})}$
$(\vec{x_G}\ \vec{y_G}\ \vec{z_G})$ repère local de la section de la poutre
N | T_y ou T_z | M_x | M_z | Identification de la sollicitation
=0 | ≠0 | =0 | =0 | Cisaillement simple
IMT Nord Europe



2 LE CISAILLEMENT
2.1 Rappel
23
2. DÉMARCHE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RDM
III. Dimensionnement
3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction/ cohésion
5. Contraintes σ_{12}, σ_{21}
ou
5. Déformée $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$
critère de résistance
critère de comportement
Critère de limite d'élasticité
Critère de déformation
non vérifié
non vérifié
Cisaillement simple
$_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
ou
$_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
Loi de Hooke généralisée
$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij}}{E} - \nu\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{E}$
$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
IMT Nord Europe

2 LE CISAILLEMENT

2.1 Rappel

24

Équations d'équilibre dans le cas du cisaillement pur

N	T_y ou T_z	M_x	M_Z	Identification de la sollicitation
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple

Expression des équations d'équilibre de la section coupée

$$\left.\begin{array}{l} {}_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint\to(\Omega)}\} \\ {}_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d\to g}\} \end{array}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{ll} \iint_{(\Omega)} \sigma_n \, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y\cdot\tau_z - z\cdot\tau_y \, d\Omega = 0 \\ T_y + \iint_{(\Omega)} \tau_y \, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} z\cdot\sigma_n \, d\Omega = 0 \\ T_z + \iint_{(\Omega)} \tau_z \, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y\cdot\sigma_n \, d\Omega = 0 \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$$

soit

Soit $T_y = 0$ soit $T_z = 0$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

2 LE CISAILLEMENT

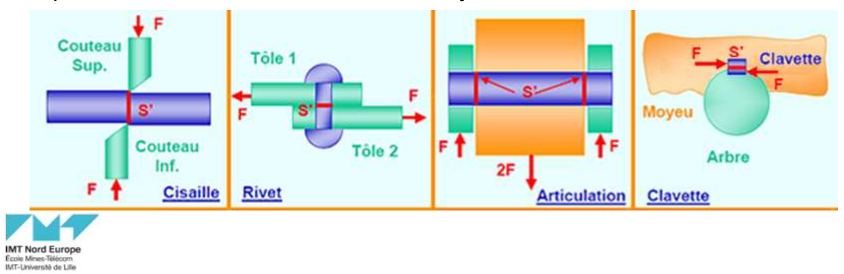
2.2 Cisaillement : cas type

25

En pratique le cisaillement est combiné avec d'autres sollicitations (Le cas le plus fréquent est celui de la flexion simple pour lequel l'effort tranchant est accompagné d'un moment de flexion. Dans ce cas la contrainte de traction est beaucoup plus importante, et l'effort tranchant est négligé).

Cisaillement pur → Assez rare

La configuration du système étudié permet d'appliquer sur une pièce de ce système, l'effort de cisaillement dans un plan défini où se situe la section cisaillée. Par exemple : cisaille (deux couteaux), rivet (liant deux tôles), axe d'articulation de deux pièces, clavette liant un arbre à un moyeu.



IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

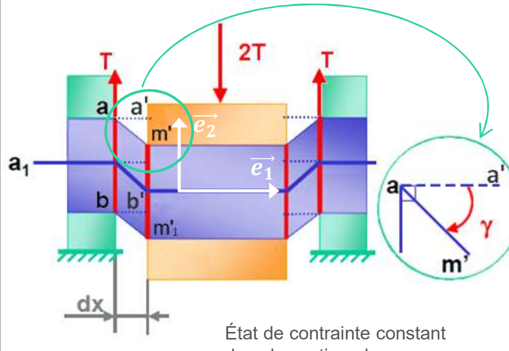
2 LE CISAILLEMENT

2.3 Cisaillement → Schéma de principe

26

Caractérisation du cisaillement pur

Lors d'un essai de cisaillement observons : 2 Sections infiniment voisines matérialisées par ab et a'b' de normale $\vec{n}$ espacées de la distance faible **dx**.



On constate que la section a'b' glisse en bloc par rapport à la section ab donc la transformation est homogène :

La contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma_{tn}}$ est constante dans la section ab de normale $\vec{n}\,(=\vec{e_1})$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{-\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} (= \sigma_{21})$$

État de contrainte constant dans la section ab

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

Facette de normale $\vec{e_1}$ $\vec{e_2}$ $\vec{e_3}$

Un **angle de glissement** ? matérialisé par $(\widehat{a'\,a\,m'})$ ou $(\widehat{b'\,b\,m'_1})$ se forme, avec a' ou b' la position initiale du point appartenant à la section cisaillée et m' ou m'$_1$ sa position finale après déformation.

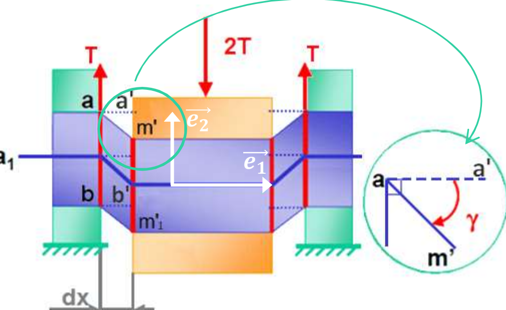
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

2 LE CISAILLEMENT

2.3 Cisaillement → Schéma de principe

27

Caractérisation du cisaillement pur



On déduit que quelque soit p appartenant à la section ab cisaillée le vecteur contrainte :

$$\vec{T}(P,\vec{e_1}) = \tau\vec{e_2} = \frac{-T}{S}\vec{e_2}$$

On déduit l'état de contrainte :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} = \frac{-\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} & 0 \\ \sigma_{21} = \frac{-\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{S}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

A l'aide de la loi de Hooke on peut définir l'état de déformation

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij}$$

(δ_{ij}: symbole de Kronecker)

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$ Module de Coulomb

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} & 0 \\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{-\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{2\mu S}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

2 LE CISAILLEMENT

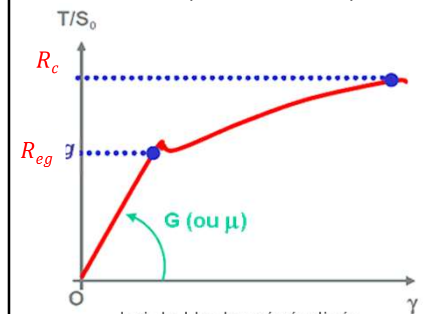
2.4 Essai de Cisaillement (Norme NF EN 3238:2010)

28

Courbe de l'essai de cisaillement

On relève la courbe représentant τ=T/S_0 (T effort de traction, S_0 section initiale de la poutre) en fonction de l'angle ?

On constate une analogie entre l'essai de traction et de cisaillement (caractéristiques du matériau explicitant son comportement en cisaillement)



On distingue :

Domaine élastique linéaire $0 \leq \frac{T}{S} \leq R_{eg}$

$\tau = \frac{T}{S}$, $\tau = \mu\gamma = G\gamma$

Résistance élastique au glissement

avec

- $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ module de Coulomb ou → 2[ème] coefficient de Lamé
- γ angle de cisaillement

– Loi de Hooke généralisée

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \nu\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$$

(δ_{ij}: symbole de Kronecker)

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \tau \text{ avec } i \neq j \\ \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \text{ avec } i \neq j \\ \gamma = 2\varepsilon_{ij} \end{cases}$$



2 LE CISAILLEMENT

2.5 Dimensionnement

29

Critère de dimensionnement

Pour dimensionner la poutre on pose :
– une condition de résistance liée à un critère de contrainte maximale

➢ **Critère de contrainte maximale** — lié à la limite d'élasticité

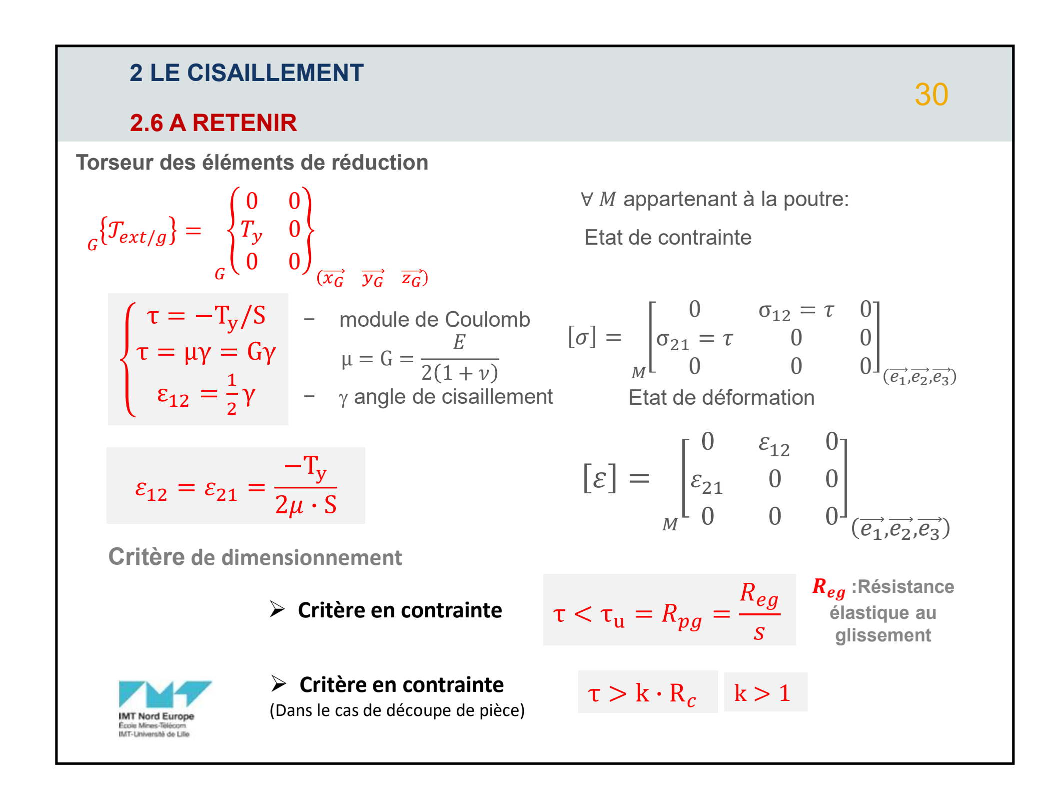
$$\tau = \sigma_{21} < \tau_u = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$ avec $s = s_m . s_e . s_f$ (>1,5)

Cas particulier :
Pour de nombreuses applications industrielles de cisaillement (ex : poinçonnage, découpe de tôles,..) on souhaitera le dépassement de la **résistance au cisaillement (** notée **Rc)**
– la condition à vérifier sera :

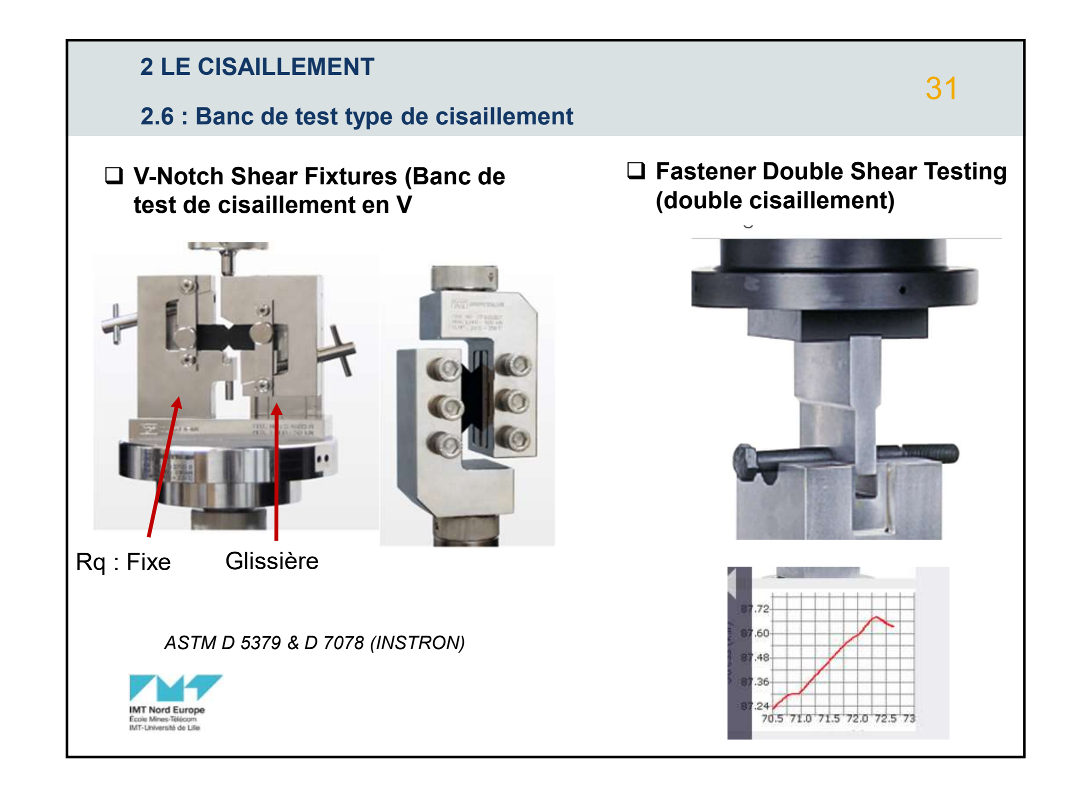
$$\tau > k \cdot Rc$$ avec $Rc = \frac{F_m}{S_0}$ et $k > 1$

(Norme NF EN 3238:2010**)**

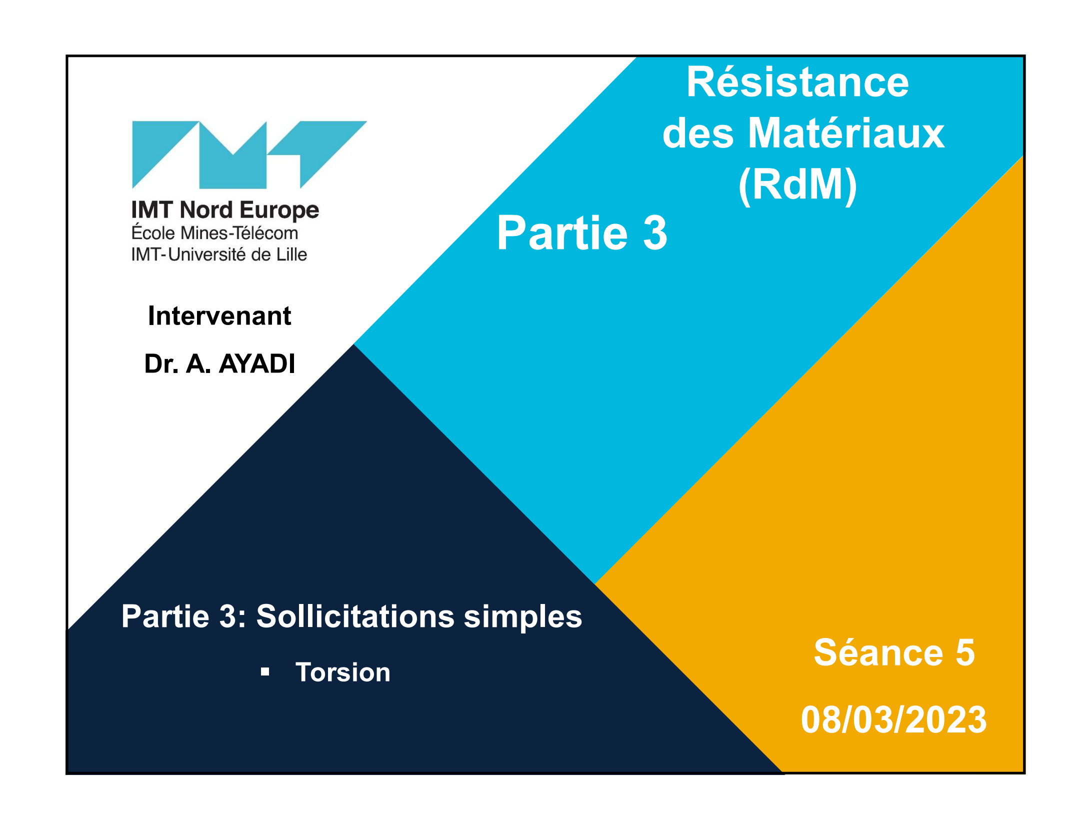
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



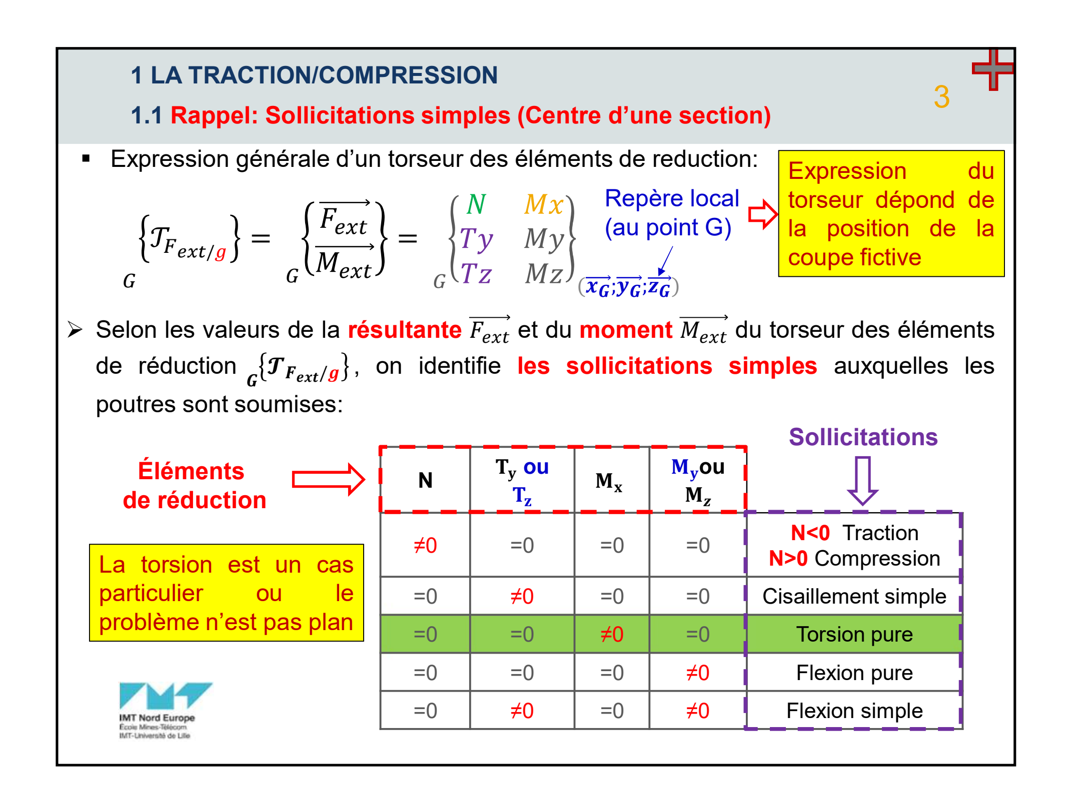
2 LE CISAILLEMENT
2.6 A RETENIR
30
Torseur des éléments de réduction
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x_G}\ \vec{y_G}\ \vec{z_G})}$
$\tau = -T_y/S$
$\tau = \mu\gamma = G\gamma$
$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma$
– module de Coulomb
$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
– γ angle de cisaillement
$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{-T_y}{2\mu \cdot S}$
$\forall M$ appartenant à la poutre:
Etat de contrainte
$[\sigma] = {}_M\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} = \tau & 0 \\ \sigma_{21} = \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
Etat de déformation
$[\varepsilon] = {}_M\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
Critère de dimensionnement
Critère en contrainte
$\tau < \tau_u = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$
R_{eg} :Résistance élastique au glissement
Critère en contrainte
(Dans le cas de découpe de pièce)
$\tau > k \cdot R_c$
$k > 1$
IMT Nord Europe



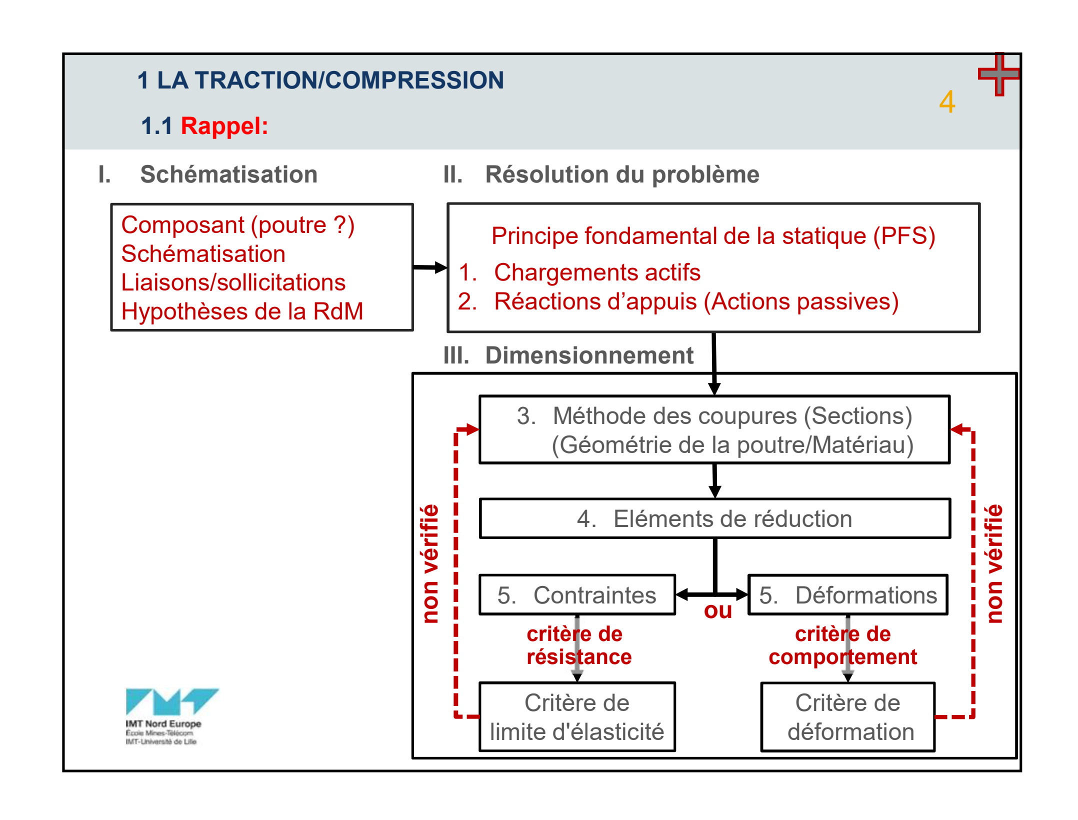
2 LE CISAILLEMENT
2.6 : Banc de test type de cisaillement
31
V-Notch Shear Fixtures (Banc de test de cisaillement en V
Fastener Double Shear Testing (double cisaillement)
Rq : Fixe
Glissière
ASTM D 5379 & D 7078 (INSTRON)
IMT Nord Europe


IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Intervenant
Dr. A. AYADI
Résistance
des Matériaux
(RdM)
Partie 3
Partie 3: Sollicitations simples
Torsion
Séance 5
08/03/2023

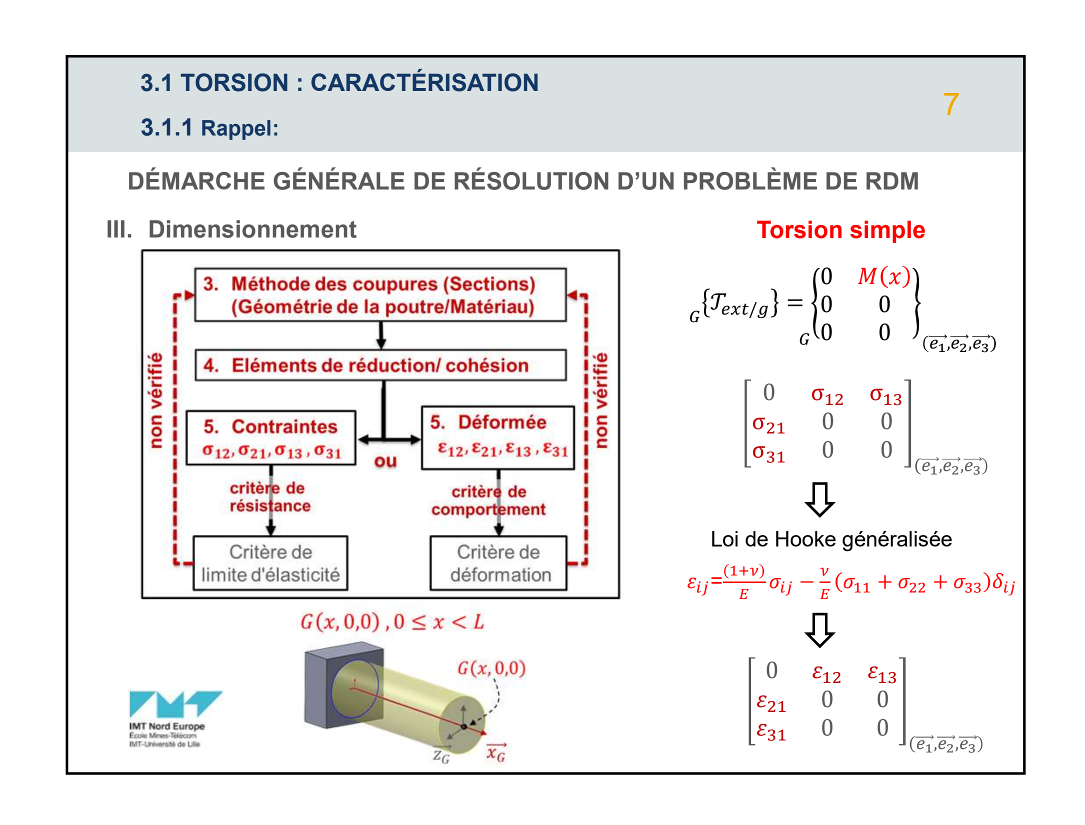

PARTIE 3
1 LA TRACTION / COMPRESSION
2 LE CISAILLEMENT PUR
3 LA TORSION
4 LA FLEXION
La flexion pure
La flexion simple
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



N	T_y ou T_z	M_x	M_y ou M_z	Sollicitations
≠0	=0	=0	=0	N<0 Traction N>0 Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0	=0	≠0	Flexion simple




PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

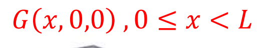

3.1 TORSION : CARACTÉRISATION
3.1.1 Rappel:
7
DÉMARCHE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RDM
III. Dimensionnement
3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction/ cohésion
5. Contraintes $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{31}$
ou
5. Déformée $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{31}$
critère de résistance
critère de comportement
Critère de limite d'élasticité
Critère de déformation
non vérifié
non vérifié
$G(x,0,0)\,, 0 \leq x < L$
$G(x,0,0)$
z_G
$\vec{x_G}$
Torsion simple
${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M(x) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
Loi de Hooke généralisée
$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$
$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

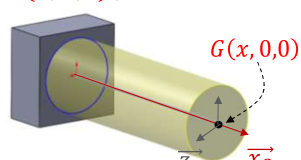
3.1 TORSION : CARACTÉRISATION

3.1.2 Caractérisation de la torsion pure

8

N	T_y ou T_z	M_x	M_Z	Identification de la sollicitation
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure





Expression du torseur des Eléments de réduction $_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_x(x) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$

- Expression des équations d'équilibre de section coupée

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d\to g}\} = {}_G\{0\} = {}_G\begin{Bmatrix} \iint_{(\Omega)} \sigma_n\, d\Omega = 0 & M_x(x) + \iint_{(\Omega)} y\cdot\tau_z - z\cdot\tau_y\, d\Omega = 0 \\ \iint_{(\Omega)} \tau_y\, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} z\cdot\sigma_n\, d\Omega = 0 \\ \iint_{(\Omega)} \tau_z\, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y\cdot\sigma_n\, d\Omega = 0 \end{Bmatrix}_{(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$$

$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint\to(\Omega)}\}$

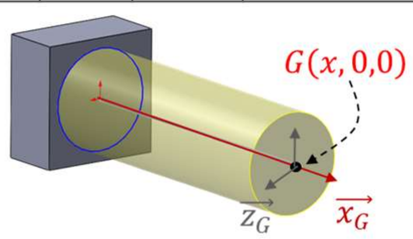
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

3.1 TORSION : CARACTÉRISATION

3.1.3 Hypothèses des cas étudiés

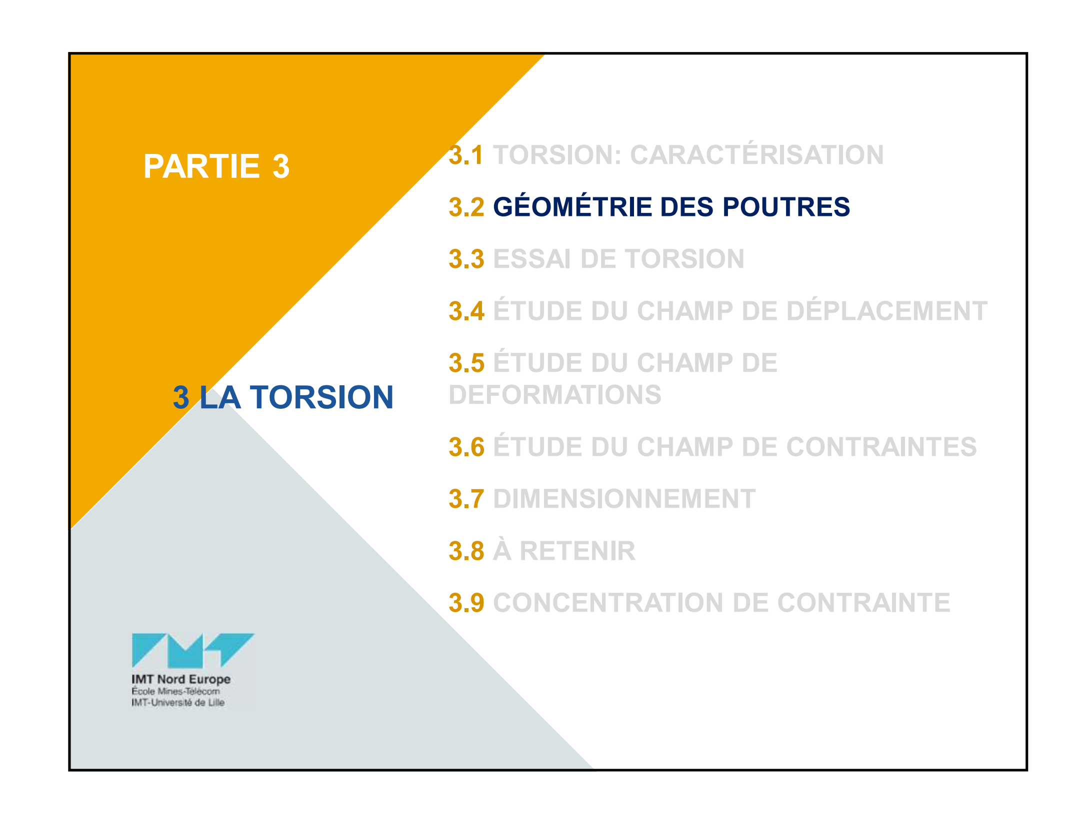
9

N	T_y ou T_z	M_x	M_Z	Identification de la sollicitation
=0	=0	≠ 0	=0	Torsion pure



La surface latérale est non chargée.
– Les forces de volume sont négligeables.
– Les éléments de réduction se réduisent à un couple $M_x = C$, dirigé selon $\vec{x}$



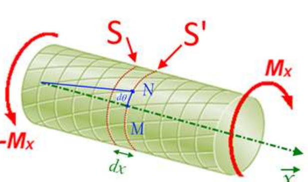


3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES

13

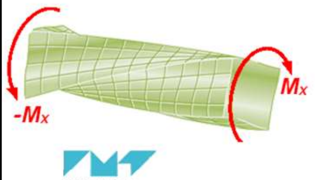
3.2 Torsion : Géométrie des poutres

Cas 1: Section avec symétrie de révolution



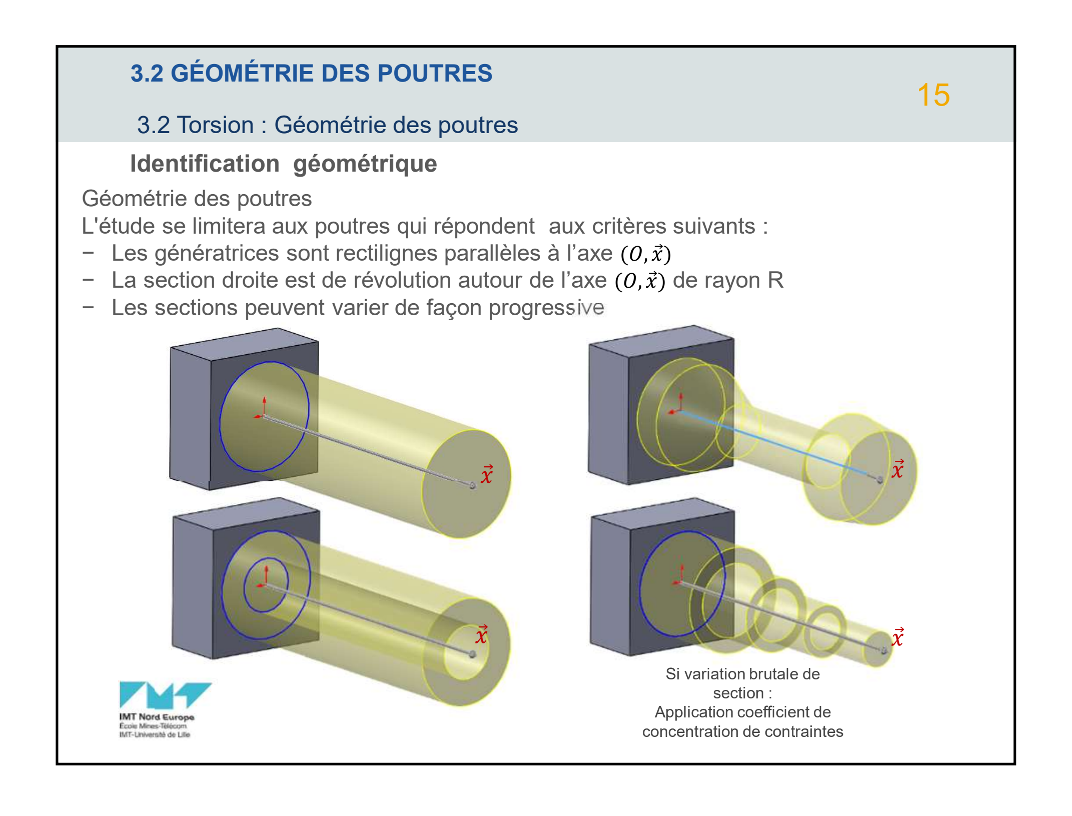
- Les sections droites **restent** planes après déformation,
- Le déplacement relatif de deux sections droites voisines (S et S'), distantes de *dx*, se réduit à une rotation d'angle *dθ* autour de l'axe $(O, \vec{x})$,
- La déformation consiste en un glissement relatif des sections voisines.

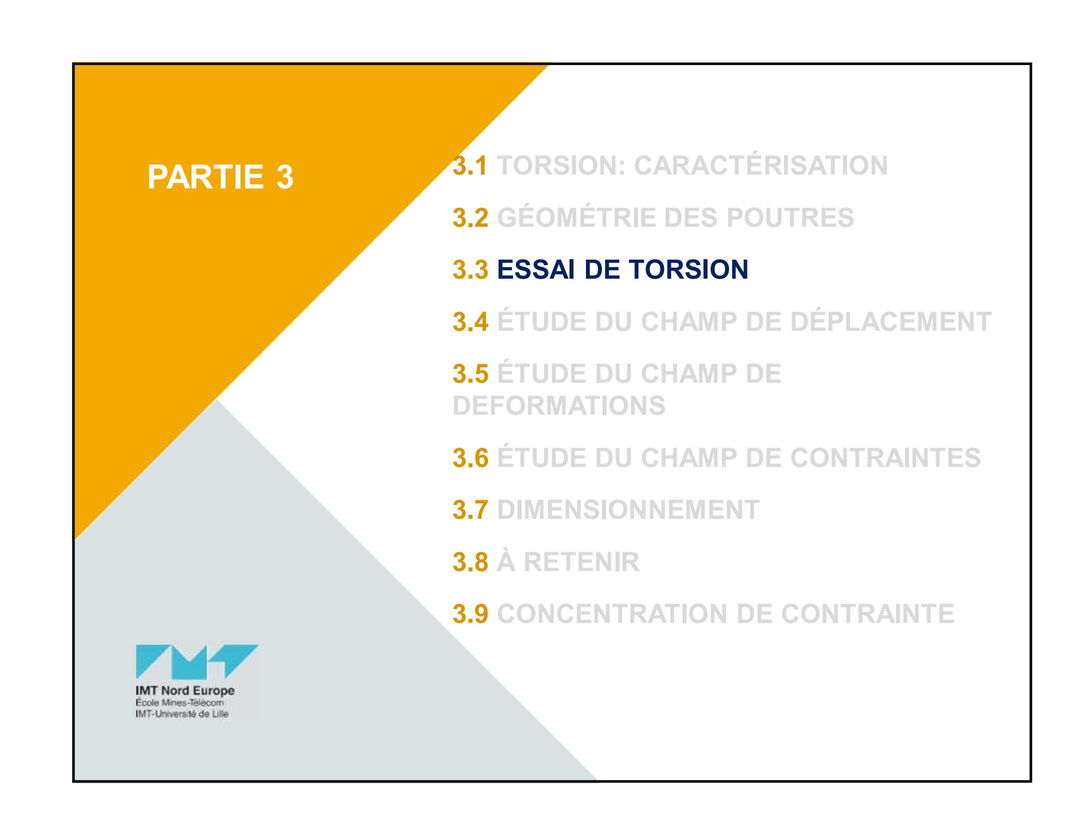
Cas 2: Section sans symétrie de révolution

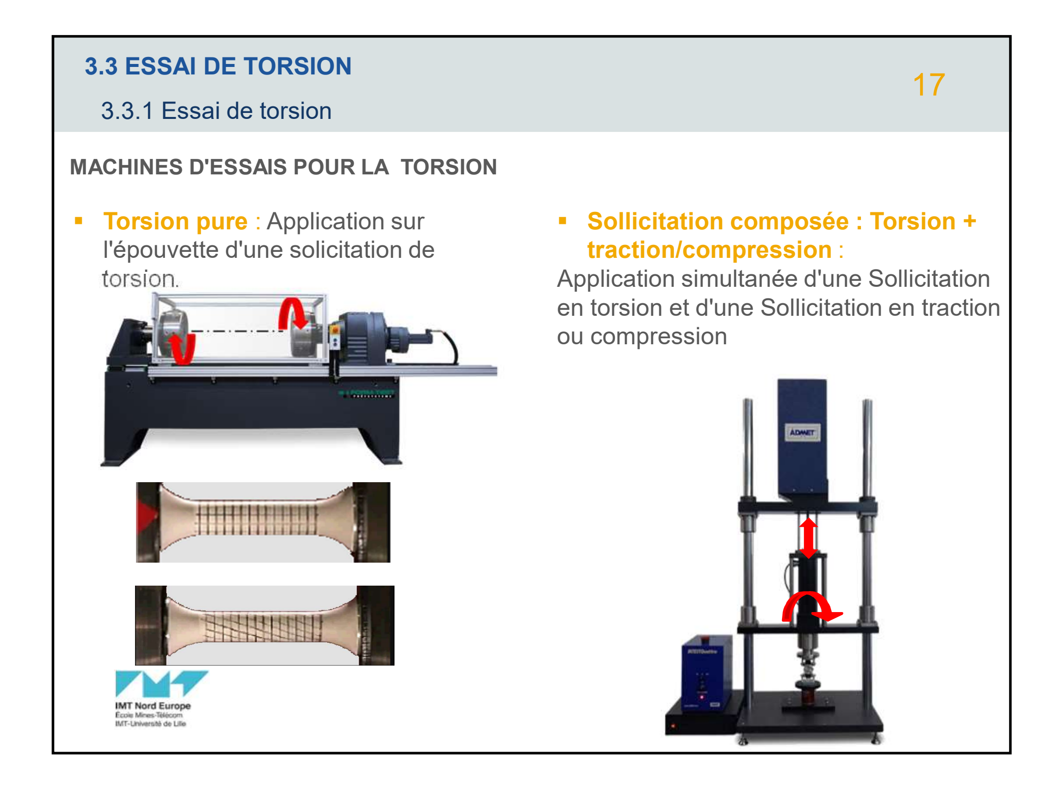


- Les sections **ne restent plus** planes après déformation,
- L'hypothèse de Navier Bernouilli (hypothèse N°7, chapitre 1) n'est plus respectée,
- Le cas 2 ne fait pas partie du cadre de ce chapitre.

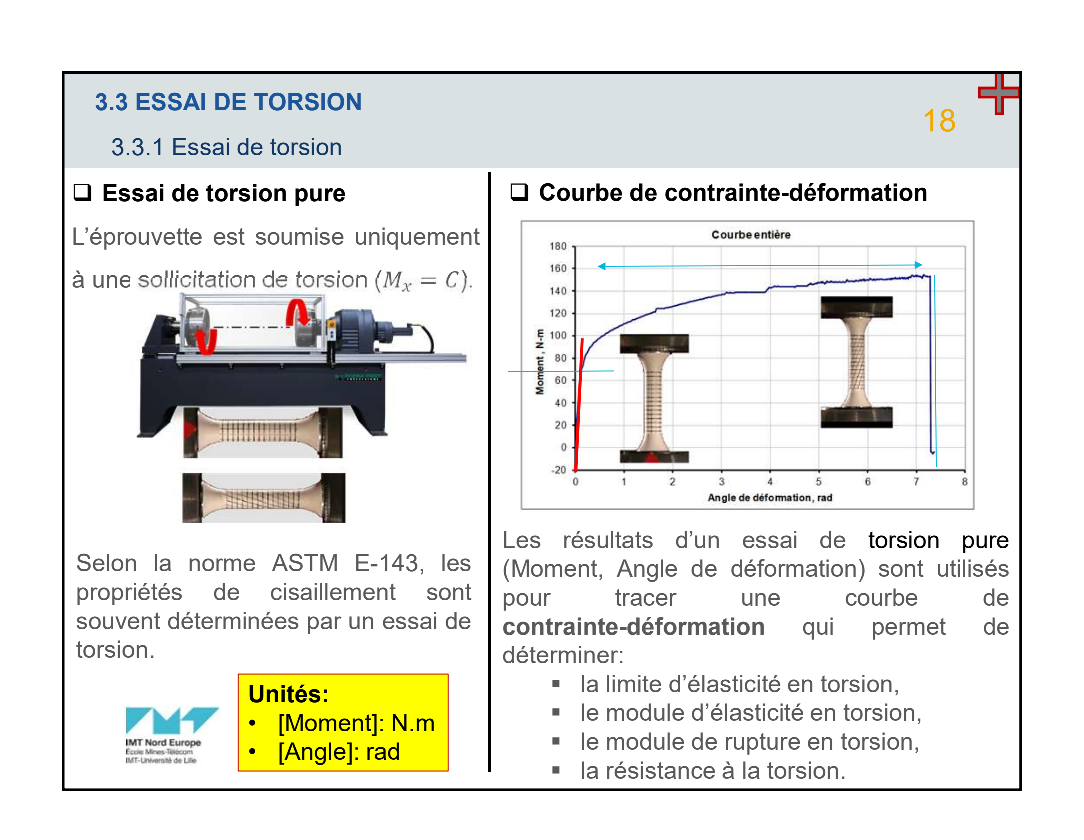
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
15
3.2 Torsion : Géométrie des poutres
Identification géométrique
Géométrie des poutres
L'étude se limitera aux poutres qui répondent aux critères suivants :
− Les génératrices sont rectilignes parallèles à l'axe $(O,\vec{x})$
− La section droite est de révolution autour de l'axe $(O,\vec{x})$ de rayon R
− Les sections peuvent varier de façon progressive
$\vec{x}$
Si variation brutale de section : Application coefficient de concentration de contraintes
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


PARTIE 3
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



3.3 ESSAI DE TORSION
3.3.1 Essai de torsion
17
MACHINES D'ESSAIS POUR LA TORSION
Torsion pure : Application sur l'épouvette d'une solicitation de torsion.
Sollicitation composée : Torsion + traction/compression :
Application simultanée d'une Sollicitation en torsion et d'une Sollicitation en traction ou compression
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



3.3 ESSAI DE TORSION
3.3.1 Essai de torsion
18
Essai de torsion pure
L'éprouvette est soumise uniquement à une sollicitation de torsion ($M_x = C$).
Selon la norme ASTM E-143, les propriétés de cisaillement sont souvent déterminées par un essai de torsion.
Unités:
[Moment]: N.m
[Angle]: rad
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Courbe de contrainte-déformation
Courbe entière
Moment, N-m
Angle de déformation, rad
Les résultats d'un essai de torsion pure (Moment, Angle de déformation) sont utilisés pour tracer une courbe de contrainte-déformation qui permet de déterminer:
la limite d'élasticité en torsion,
le module d'élasticité en torsion,
le module de rupture en torsion,
la résistance à la torsion.

3.3 ESSAI DE TORSION

3.3.1 Essai de torsion

20

Essai de torsion

Les résultats de l'essai de torsion sont utilisés pour tracer une courbe de contrainte-déformation (Moment vs Angle de déformation) qui permet de déterminer la limite d'élasticité, le module d'élasticité en torsion, le module de rupture en torsion et la résistance à la torsion. Les propriétés de cisaillement sont souvent déterminées par un essai de torsion (ASTM E-143)

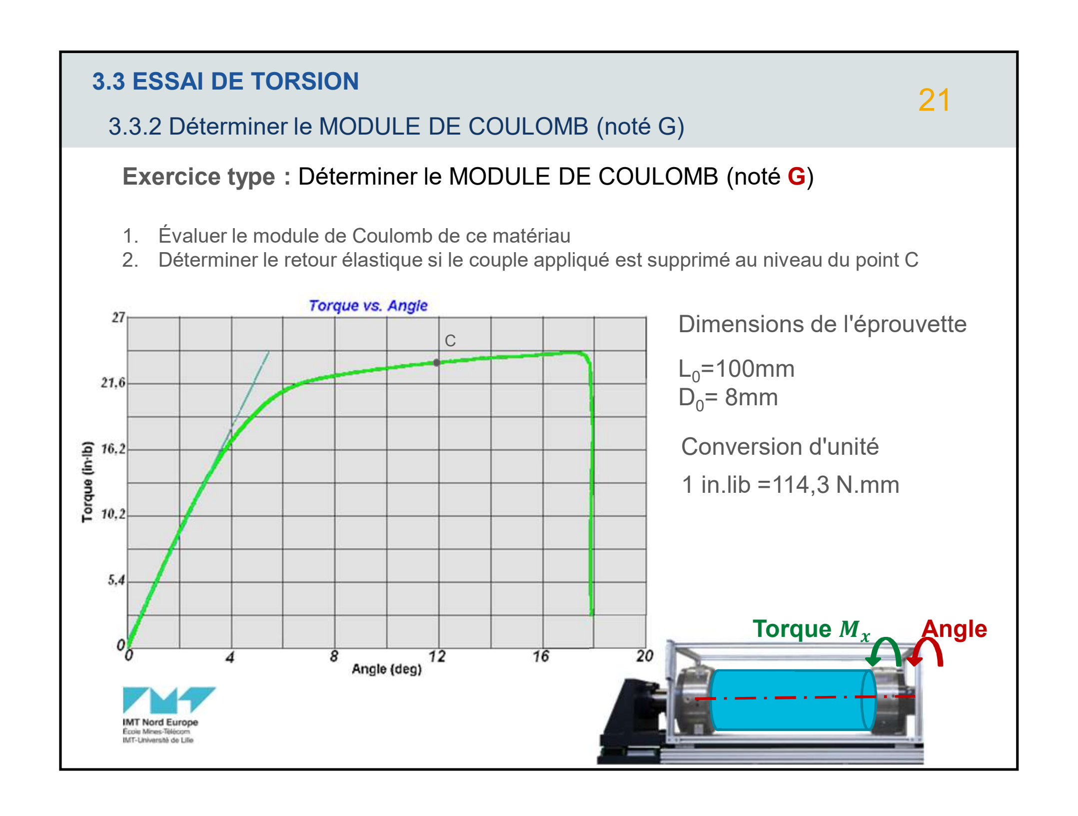
Déterminer le MODULE DE COULOMB (noté **G**) encore appelé **module de cisaillement** ou **module de glissement** ou **second coefficient de lamé** (noté **μ**)

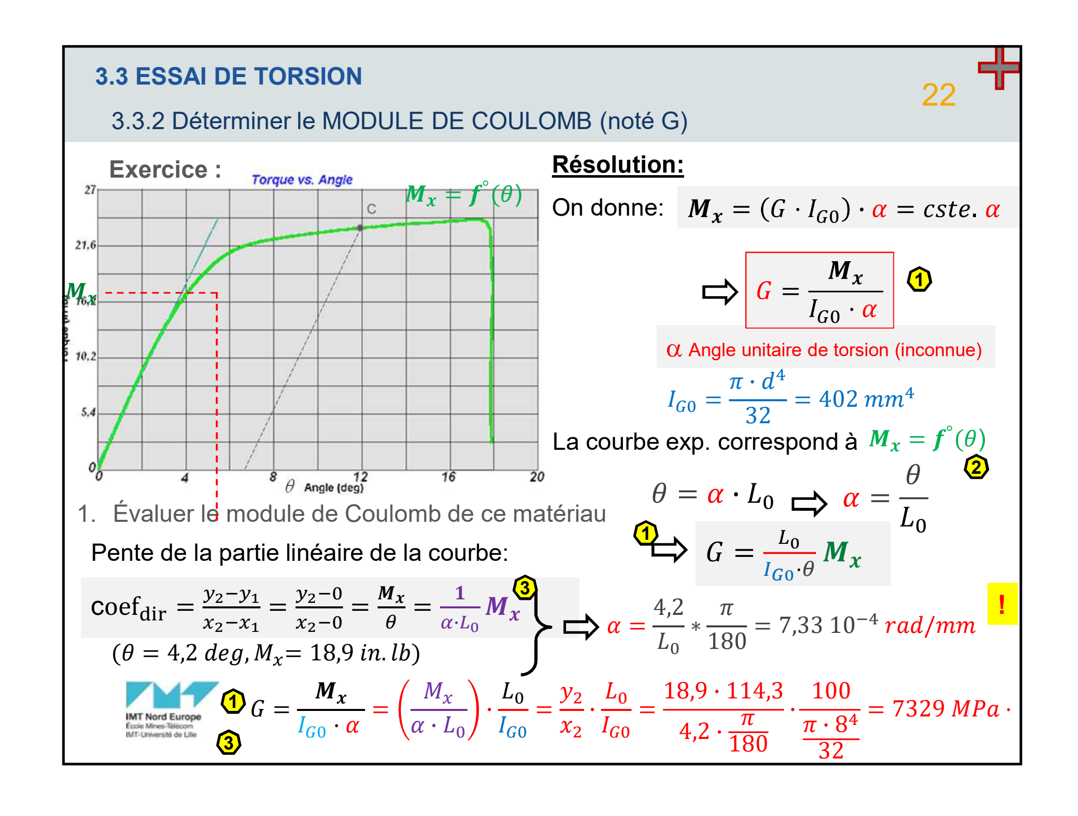
Courbe entière — Moment, N-m vs Angle de déformation, rad

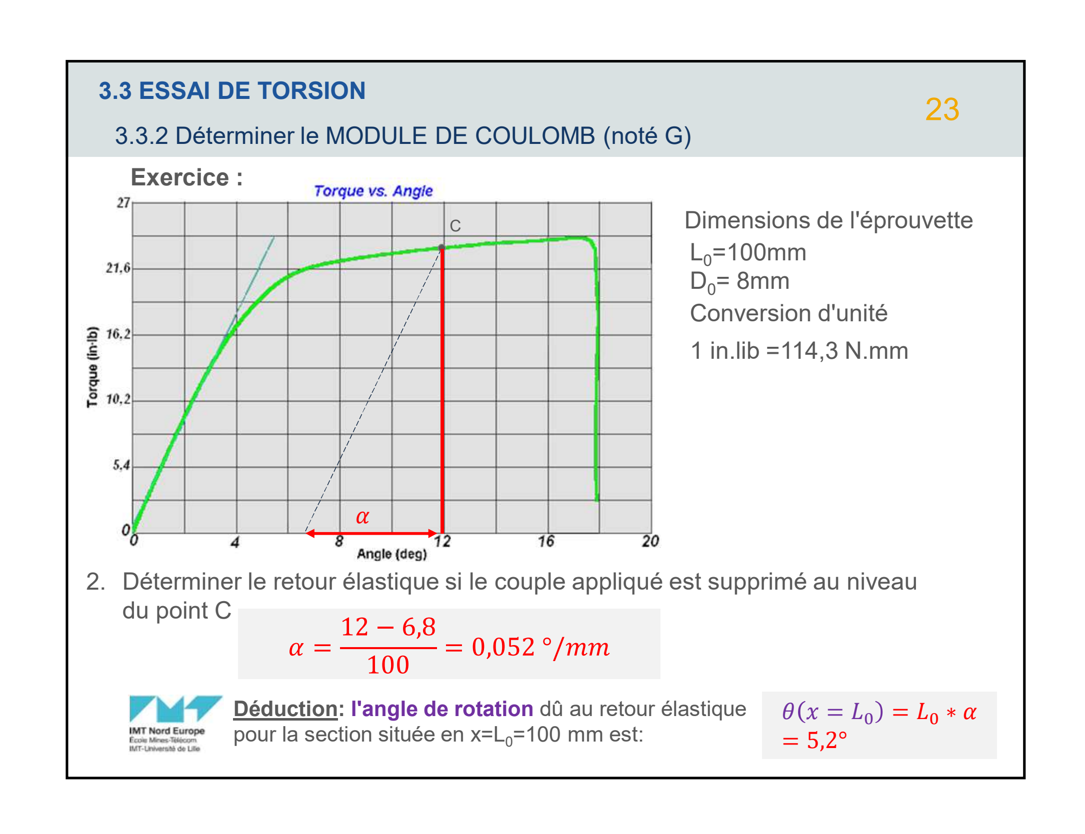
Détail sur la partie linéaire — Moment, N-m vs Angle de déformation, rad

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

Faites attention aux unités !

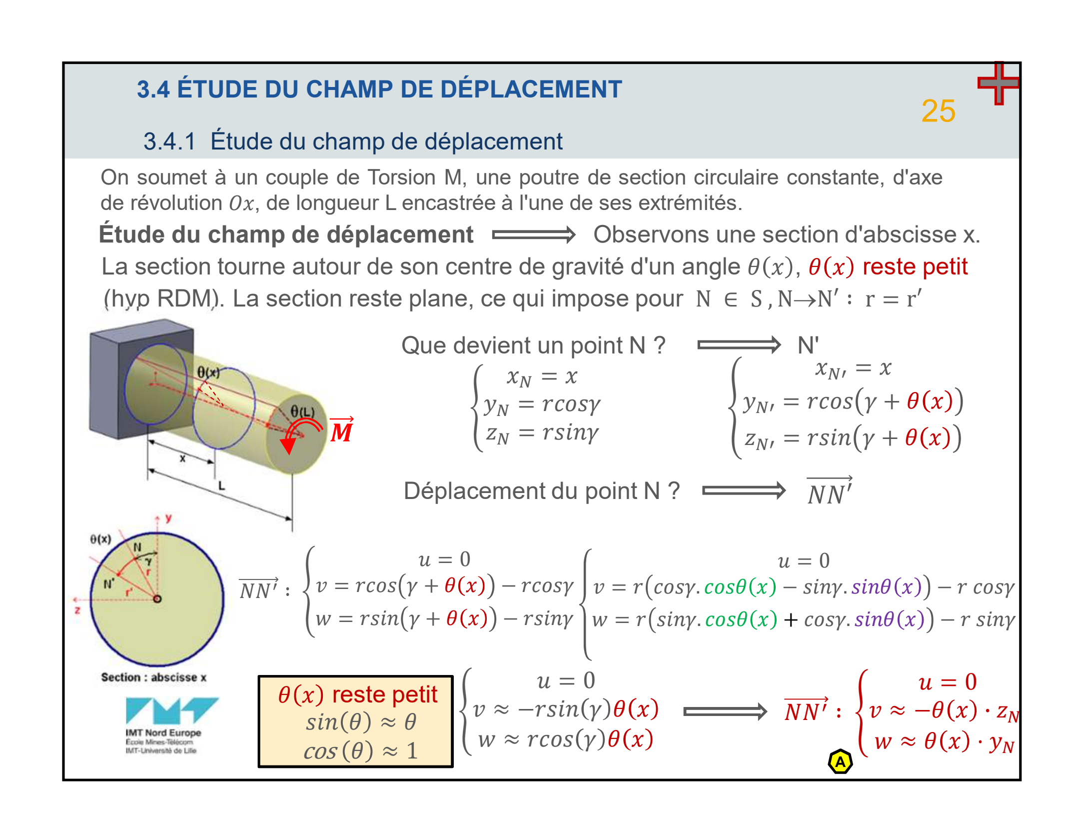



3.3 ESSAI DE TORSION
3.3.2 Déterminer le MODULE DE COULOMB (noté G)
22
Exercice :
Torque vs. Angle
$M_x = f^{\circ}(\theta)$
Angle (deg)
1. Évaluer le module de Coulomb de ce matériau
Pente de la partie linéaire de la courbe:
$\text{coef}_{\text{dir}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{M_x}{\theta} = \frac{1}{\alpha \cdot L_0} M_x$
$(\theta = 4{,}2\ deg, M_x = 18{,}9\ in.\ lb)$
Résolution:
On donne: $M_x = (G \cdot I_{G0}) \cdot \alpha = cste.\ \alpha$
$G = \frac{M_x}{I_{G0} \cdot \alpha}$
α Angle unitaire de torsion (inconnue)
$I_{G0} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 402\ mm^4$
La courbe exp. correspond à $M_x = f^{\circ}(\theta)$
$\theta = \alpha \cdot L_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{L_0}$
$G = \frac{L_0}{I_{G0} \cdot \theta} M_x$
$\alpha = \frac{4{,}2}{L_0} * \frac{\pi}{180} = 7{,}33\ 10^{-4}\ rad/mm$
$G = \frac{M_x}{I_{G0} \cdot \alpha} = \left(\frac{M_x}{\alpha \cdot L_0}\right) \cdot \frac{L_0}{I_{G0}} = \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{L_0}{I_{G0}} = \frac{18{,}9 \cdot 114{,}3}{4{,}2 \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot \frac{100}{\frac{\pi \cdot 8^4}{32}} = 7329\ MPa$
IMT Nord Europe

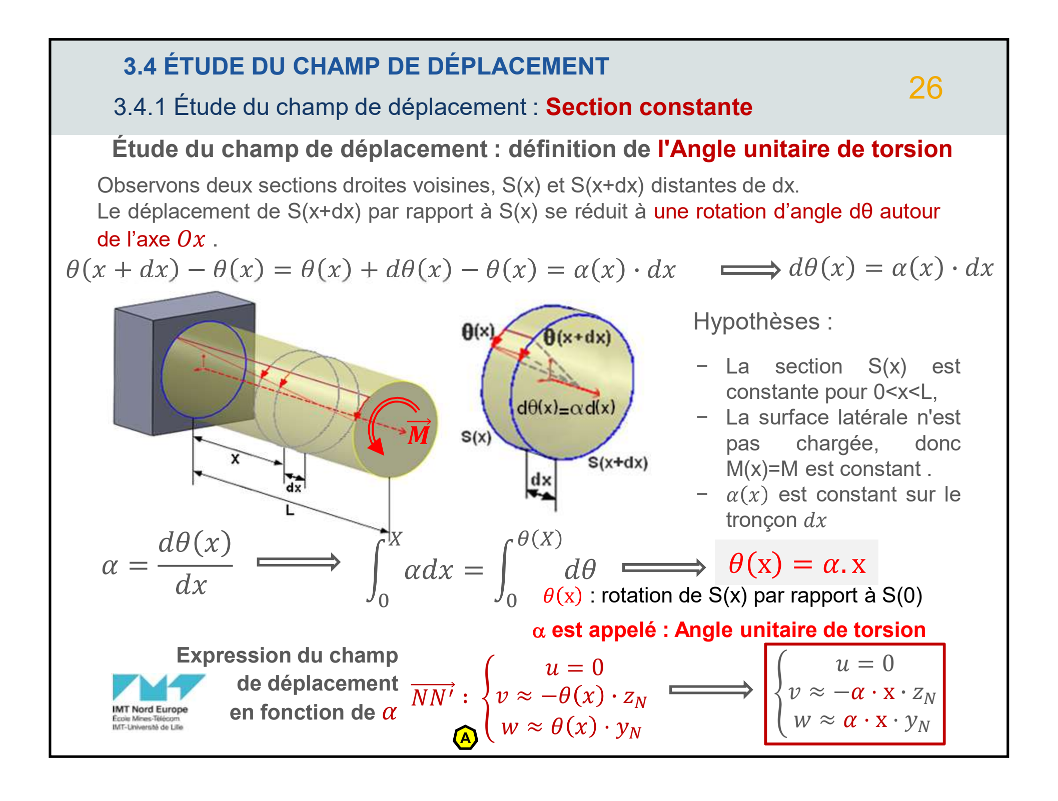

3.3 ESSAI DE TORSION
3.3.2 Déterminer le MODULE DE COULOMB (noté G)
23
Exercice :
Torque vs. Angle
Torque (in-lb)
Angle (deg)
α
Dimensions de l'éprouvette
L_0=100mm
D_0= 8mm
Conversion d'unité
1 in.lib =114,3 N.mm
2. Déterminer le retour élastique si le couple appliqué est supprimé au niveau du point C
$\alpha = \frac{12 - 6{,}8}{100} = 0{,}052\ °/mm$
Déduction: l'angle de rotation dû au retour élastique pour la section située en x=L_0=100 mm est:
$\theta(x = L_0) = L_0 * \alpha = 5{,}2°$
IMT Nord Europe

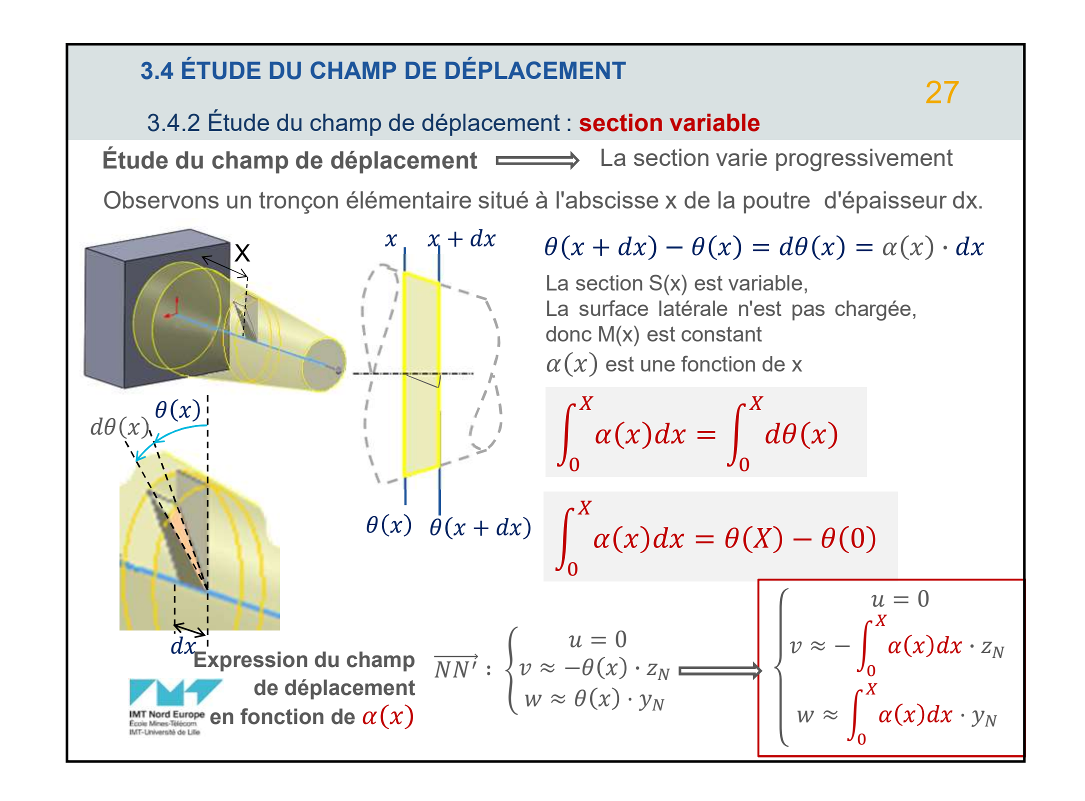


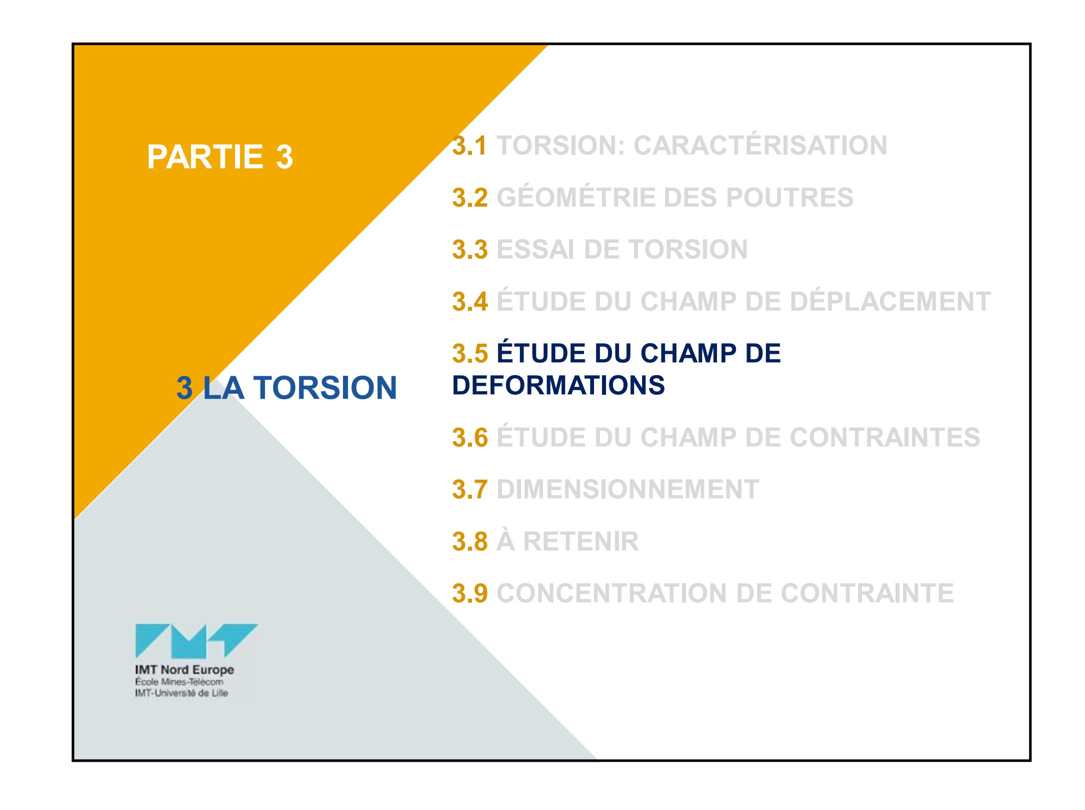
PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

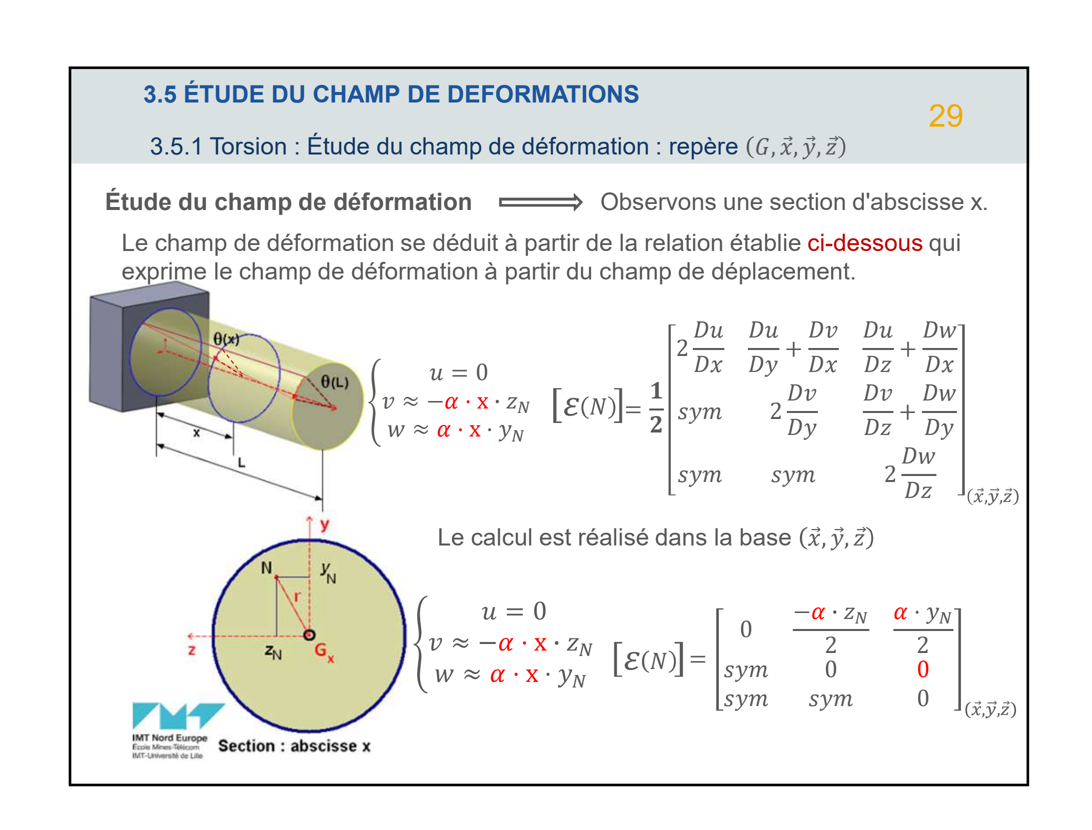


3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
25
3.4.1 Étude du champ de déplacement
On soumet à un couple de Torsion M, une poutre de section circulaire constante, d'axe de révolution Ox, de longueur L encastrée à l'une de ses extrémités.
Étude du champ de déplacement ⟹ Observons une section d'abscisse x.
La section tourne autour de son centre de gravité d'un angle $\theta(x)$, $\theta(x)$ reste petit (hyp RDM). La section reste plane, ce qui impose pour $N \in S, N \to N' : r = r'$
θ(x)
θ(L)
M
x
L
Que devient un point N ? ⟹ N'
$\begin{cases} x_N = x \\ y_N = r\cos\gamma \\ z_N = r\sin\gamma \end{cases}$
$\begin{cases} x_{N'} = x \\ y_{N'} = r\cos(\gamma + \theta(x)) \\ z_{N'} = r\sin(\gamma + \theta(x)) \end{cases}$
Déplacement du point N ? ⟹ $\overrightarrow{NN'}$
θ(x)
y
N
N'
γ
r
r'
z
Section : abscisse x
$\overrightarrow{NN'} : \begin{cases} u = 0 \\ v = r\cos(\gamma + \theta(x)) - r\cos\gamma \\ w = r\sin(\gamma + \theta(x)) - r\sin\gamma \end{cases}$
$\begin{cases} u = 0 \\ v = r(\cos\gamma.\cos\theta(x) - \sin\gamma.\sin\theta(x)) - r\cos\gamma \\ w = r(\sin\gamma.\cos\theta(x) + \cos\gamma.\sin\theta(x)) - r\sin\gamma \end{cases}$
$\theta(x)$ reste petit
$\sin(\theta) \approx \theta$
$\cos(\theta) \approx 1$
$\begin{cases} u = 0 \\ v \approx -r\sin(\gamma)\theta(x) \\ w \approx r\cos(\gamma)\theta(x) \end{cases}$
⟹ $\overrightarrow{NN'} : \begin{cases} u = 0 \\ v \approx -\theta(x) \cdot z_N \\ w \approx \theta(x) \cdot y_N \end{cases}$
A
IMT Nord Europe


3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.4.1 Étude du champ de déplacement : Section constante
26
Étude du champ de déplacement : définition de l'Angle unitaire de torsion
Observons deux sections droites voisines, S(x) et S(x+dx) distantes de dx.
Le déplacement de S(x+dx) par rapport à S(x) se réduit à une rotation d'angle dθ autour de l'axe Ox .
$\theta(x+dx)-\theta(x)=\theta(x)+d\theta(x)-\theta(x)=\alpha(x)\cdot dx \Longrightarrow d\theta(x)=\alpha(x)\cdot dx$
x
dx
L
M
θ(x)
θ(x+dx)
dθ(x)=α d(x)
S(x)
S(x+dx)
dx
Hypothèses :
La section S(x) est constante pour 0<x<L,
La surface latérale n'est pas chargée, donc M(x)=M est constant .
$\alpha(x)$ est constant sur le tronçon dx
$\alpha=\frac{d\theta(x)}{dx} \Longrightarrow \int_0^X \alpha dx=\int_0^{\theta(X)} d\theta \Longrightarrow \theta(x)=\alpha.x$
$\theta(x)$: rotation de S(x) par rapport à S(0)
α est appelé : Angle unitaire de torsion
Expression du champ de déplacement en fonction de α
$\overrightarrow{NN'}$: $u=0$, $v\approx-\theta(x)\cdot z_N$, $w\approx\theta(x)\cdot y_N$
$u=0$, $v\approx-\alpha\cdot x\cdot z_N$, $w\approx\alpha\cdot x\cdot y_N$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.4.2 Étude du champ de déplacement : section variable
27
Étude du champ de déplacement ⟹ La section varie progressivement
Observons un tronçon élémentaire situé à l'abscisse x de la poutre d'épaisseur dx.
X
x $x+dx$
$\theta(x+dx)-\theta(x)=d\theta(x)=\alpha(x)\cdot dx$
La section S(x) est variable,
La surface latérale n'est pas chargée,
donc M(x) est constant
$\alpha(x)$ est une fonction de x
$\int_0^X \alpha(x)dx=\int_0^X d\theta(x)$
$d\theta(x)$ $\theta(x)$
$\theta(x)$ $\theta(x+dx)$
$\int_0^X \alpha(x)dx=\theta(X)-\theta(0)$
dx
Expression du champ de déplacement en fonction de $\alpha(x)$
$\overrightarrow{NN'}$: $u=0$, $v\approx-\theta(x)\cdot z_N$, $w\approx\theta(x)\cdot y_N$
$u=0$, $v\approx-\int_0^X \alpha(x)dx\cdot z_N$, $w\approx\int_0^X \alpha(x)dx\cdot y_N$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
29
3.5.1 Torsion : Étude du champ de déformation : repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Étude du champ de déformation ⟹ Observons une section d'abscisse x.
Le champ de déformation se déduit à partir de la relation établie ci-dessous qui exprime le champ de déformation à partir du champ de déplacement.
θ(x)
θ(L)
x
L
$\begin{cases} u = 0 \\ v \approx -\alpha \cdot x \cdot z_N \\ w \approx \alpha \cdot x \cdot y_N \end{cases}$
$[\mathcal{E}(N)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{Du}{Dx} & \frac{Du}{Dy}+\frac{Dv}{Dx} & \frac{Du}{Dz}+\frac{Dw}{Dx} \\ sym & 2\frac{Dv}{Dy} & \frac{Dv}{Dz}+\frac{Dw}{Dy} \\ sym & sym & 2\frac{Dw}{Dz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Le calcul est réalisé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
y
N
y_N
r
z
z_N
G_x
$\begin{cases} u = 0 \\ v \approx -\alpha \cdot x \cdot z_N \\ w \approx \alpha \cdot x \cdot y_N \end{cases}$
$[\mathcal{E}(N)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\alpha \cdot z_N}{2} & \frac{\alpha \cdot y_N}{2} \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Section : abscisse x

3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS

30

3.5.2 Torsion : Étude du champ de déformation **dans le repère polaire** $(G,\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

Étude du champ de contraintes ⟹ dans le repère $(G,\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

$\vec{e_r}$, y, N, β, y_N, $\vec{e_\theta}$, r, z, z_N, G_x

Section : abscisse x

$\vec{y}$, β, $\vec{e_r}$, $\vec{z}$, β, $\vec{e_\theta}$

$$\frac{z_N}{y_N} = tg\beta$$

$$[\varepsilon(N)]_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = \boldsymbol{P^t}\begin{bmatrix} 0 & \frac{-\alpha\cdot z_N}{2} & \frac{\alpha\cdot y_N}{2} \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\cdot \boldsymbol{P}$$

P : Matrice de passage de $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à $(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

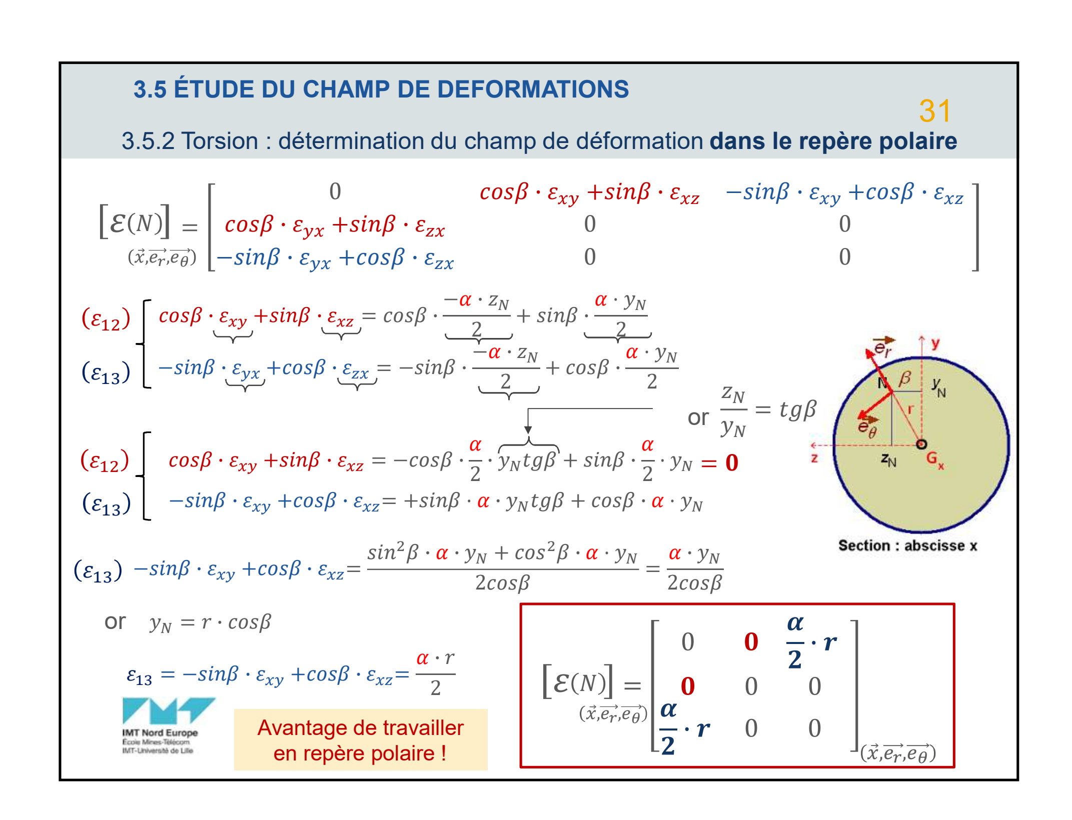
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

Matrice de passage
Exprimer $\vec{x},\vec{e_r}$ *et* $\vec{e_\theta}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

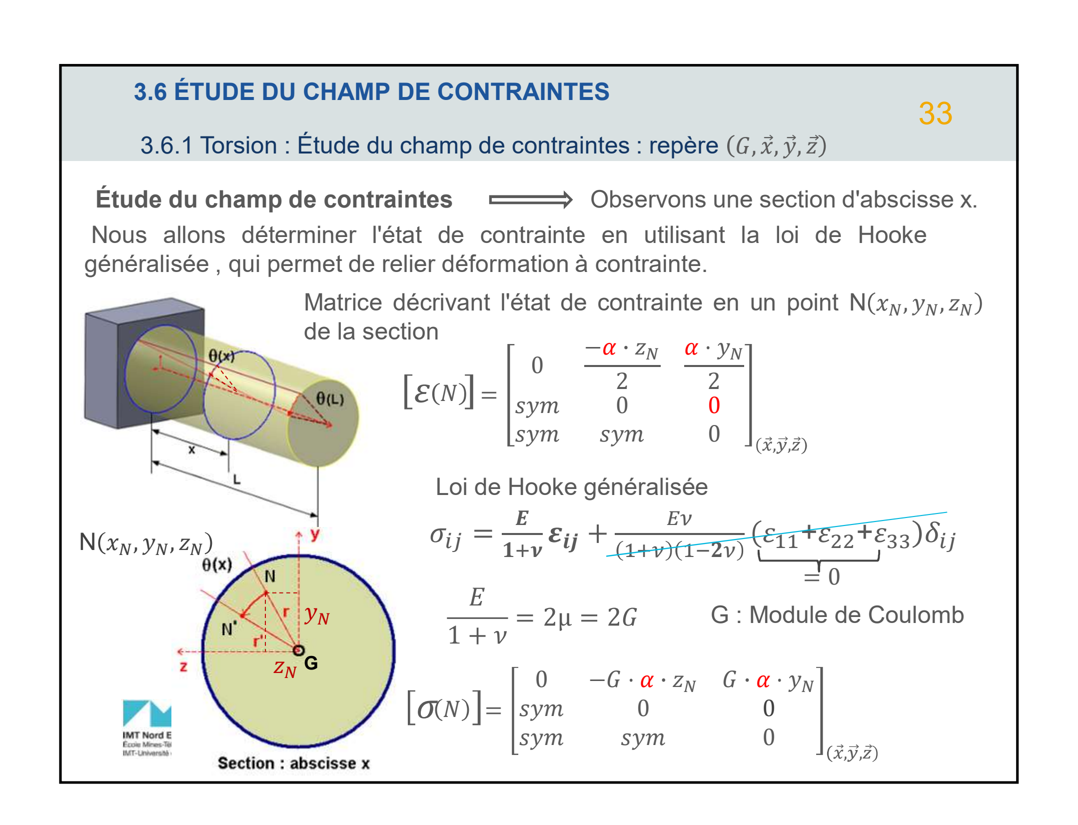
$$[\varepsilon(N)]_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & sin\beta \\ 0 & -sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon(N)]_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = \begin{bmatrix} 0 & cos\beta\cdot\varepsilon_{xy}+sin\beta\cdot\varepsilon_{xz} & -sin\beta\cdot\varepsilon_{xy}+cos\beta\cdot\varepsilon_{xz} \\ cos\beta\cdot\varepsilon_{yx}+sin\beta\cdot\varepsilon_{zx} & 0 & 0 \\ -sin\beta\cdot\varepsilon_{yx}+cos\beta\cdot\varepsilon_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille




PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
33
3.6.1 Torsion : Étude du champ de contraintes : repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Étude du champ de contraintes ⟹ Observons une section d'abscisse x.
Nous allons déterminer l'état de contrainte en utilisant la loi de Hooke généralisée , qui permet de relier déformation à contrainte.
Matrice décrivant l'état de contrainte en un point N(x_N, y_N, z_N) de la section
$$[\varepsilon(N)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\alpha \cdot z_N}{2} & \frac{\alpha \cdot y_N}{2} \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$
Loi de Hooke généralisée
$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}$$
$= 0$
$$\frac{E}{1+\nu} = 2\mu = 2G$$
G : Module de Coulomb
$$[\sigma(N)] = \begin{bmatrix} 0 & -G \cdot \alpha \cdot z_N & G \cdot \alpha \cdot y_N \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$
θ(x)
θ(L)
x
L
N(x_N, y_N, z_N)
y
z
N
N'
r
r'
y_N
z_N
G
Section : abscisse x
IMT Nord E

3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES

34

3.6.1 Torsion : Étude du champ de contraintes : repère $(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Relation entre α angle unitaire de torsion et M(x)

$${}_G\{\mathcal{T}_{ext}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_x(x) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

- **Tenseur des contraintes**

$$[\sigma(N)] = \begin{bmatrix} 0 & -G\cdot\alpha\cdot z_N & G\cdot\alpha\cdot y_N \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \begin{cases} \sigma_{yx} = -G\cdot\alpha\cdot z_N & \sigma_{yx} = \tau_y \\ \sigma_{zx} = G\cdot\alpha\cdot y_N & \sigma_{zx} = \tau_z \end{cases}$$

avec $0 \le z_N \le R \qquad 0 \le y_N \le R$

- **Utilisation des équations d'équilibre d'une section**

$$M(x) + \iint_{(\Omega)} (y_N\cdot\tau_z - z_N\cdot\tau_y)\, d\Omega = M(x) + \iint_{(\Omega)} (y_N\cdot G\cdot\alpha\cdot y_N + z_N\cdot G\cdot\alpha\cdot z_N)\, d\Omega = 0$$

$$M(x) = -G\cdot\alpha \iint_{(\Omega)} {y_N}^2 + {z_N}^2\, d\Omega$$

$$M(x) = -G\cdot\alpha\cdot I_{G0}$$

$$\alpha = -\frac{M(x)}{G\cdot I_{G0}}$$

- I_{G0} est appelé moment d'inertie polaire de section
- Il s'agit d'une propriété géométrique de la section d'une poutre.

$$I_{G0} = \iint_{(\Omega)} (y^2 + z^2)\, d\Omega$$

$$I_{G0} = \iint_{(\Omega)} y^2\, d\Omega + \iint_{(\Omega)} z^2\, d\Omega = I_{Gz} + I_{Gy}$$



α : Angle unitaire de torsion
Unité de α: rad/mm

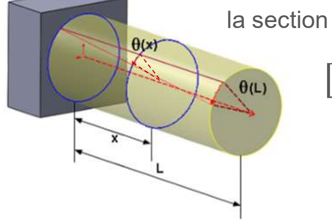
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES

36

3.6.1 Torsion : Étude du champ de contraintes : **dans le repère polaire** $(G,\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

Étude du champ de contraintes ⟹ Observons une section d'abscisse x.

Nous allons déterminer l'état de contrainte en utilisant la loi de Hooke généralisée , qui permet de relier l'état de déformation à celui de contrainte.



Matrice décrivant l'état de contrainte en un point N(x_N, r, β) de la section

$$[\varepsilon(N)] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & \frac{\alpha}{2}\cdot r \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{2}\cdot r & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})}$$

❑ **Méthode 1:** Loi de Hooke généralisée



$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underbrace{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}_{=0}\delta_{ij}$$

$$\frac{E}{1+\nu} = 2\mu = 2G$$

G : Module de Coulomb

$$[\sigma(N)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau(r) = G\cdot\alpha\cdot r \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})}$$



3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES 37

3.6.2 Torsion : Détermination du champ de contraintes **dans le repère polaire**

Étude du champ de contraintes ⟹ dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

❑ **Méthode 2: Matrice de passage**

$$\left[\sigma(N)\right]_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = P^t \begin{bmatrix} 0 & -G\cdot\alpha\cdot z_N & G\cdot\alpha\cdot y_N \\ sym & 0 & 0 \\ sym & sym & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \cdot P$$

$$\frac{z_N}{y_N} = tg\beta$$

P : Matrice de passage de $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à $(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$

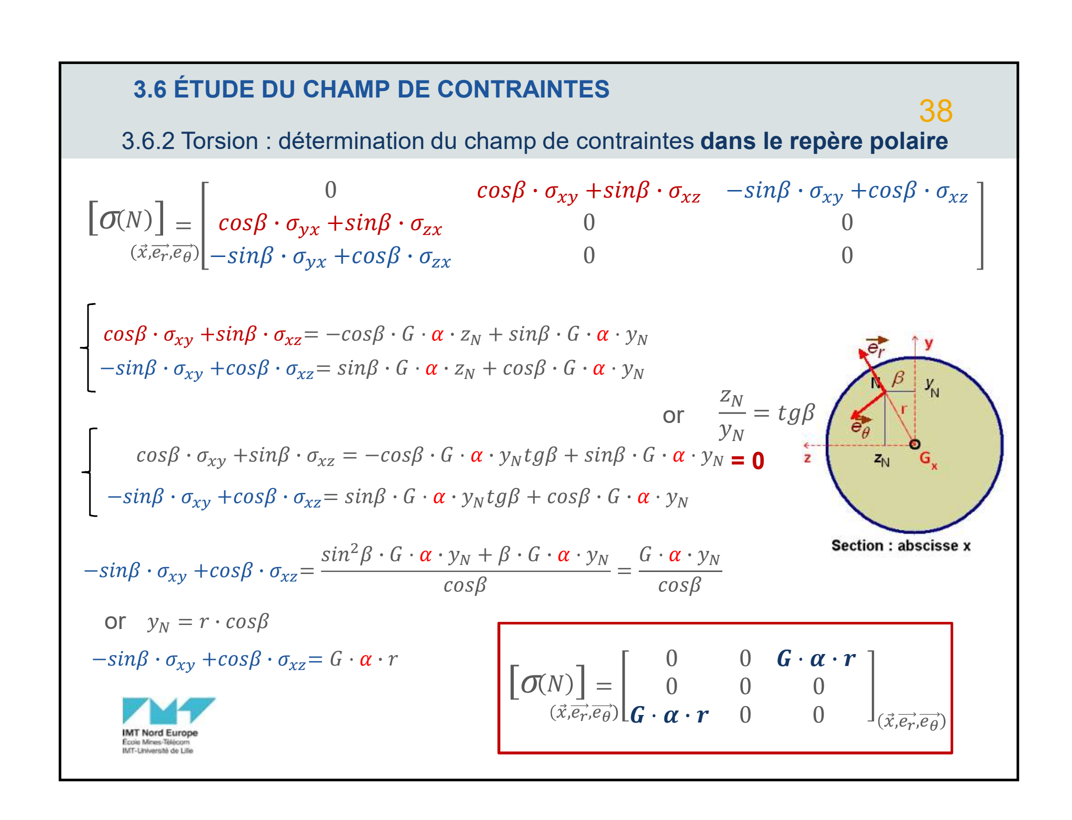
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

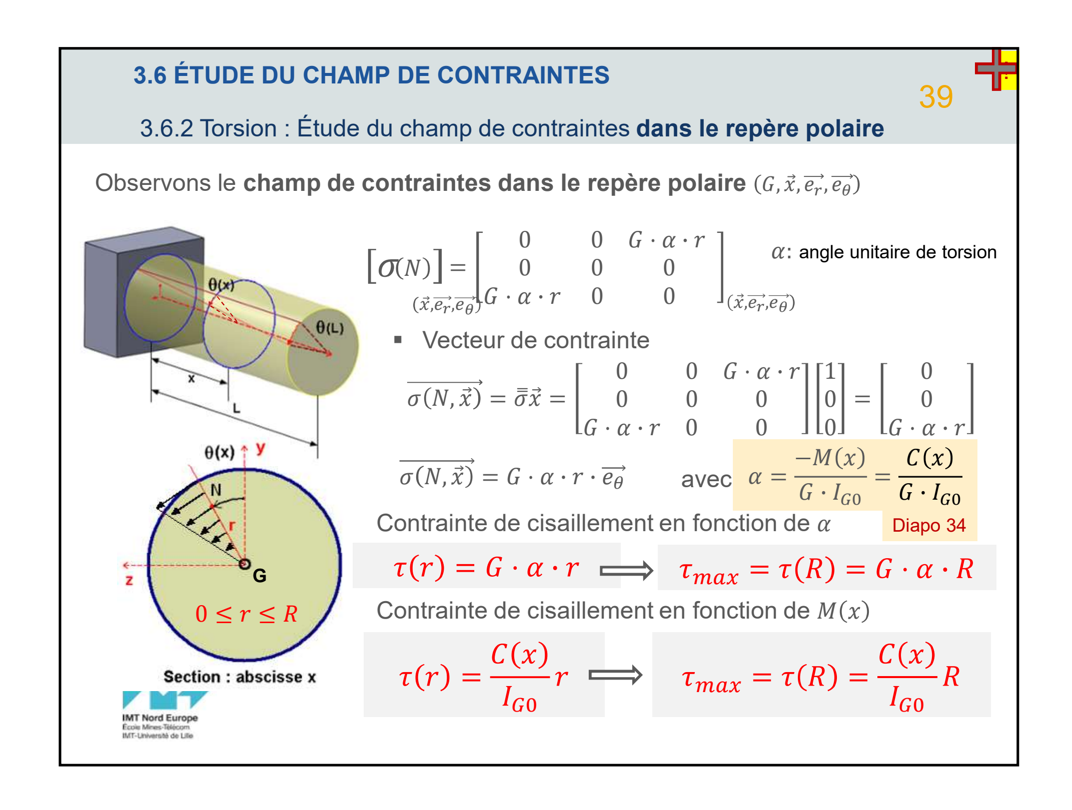
Section : abscisse x

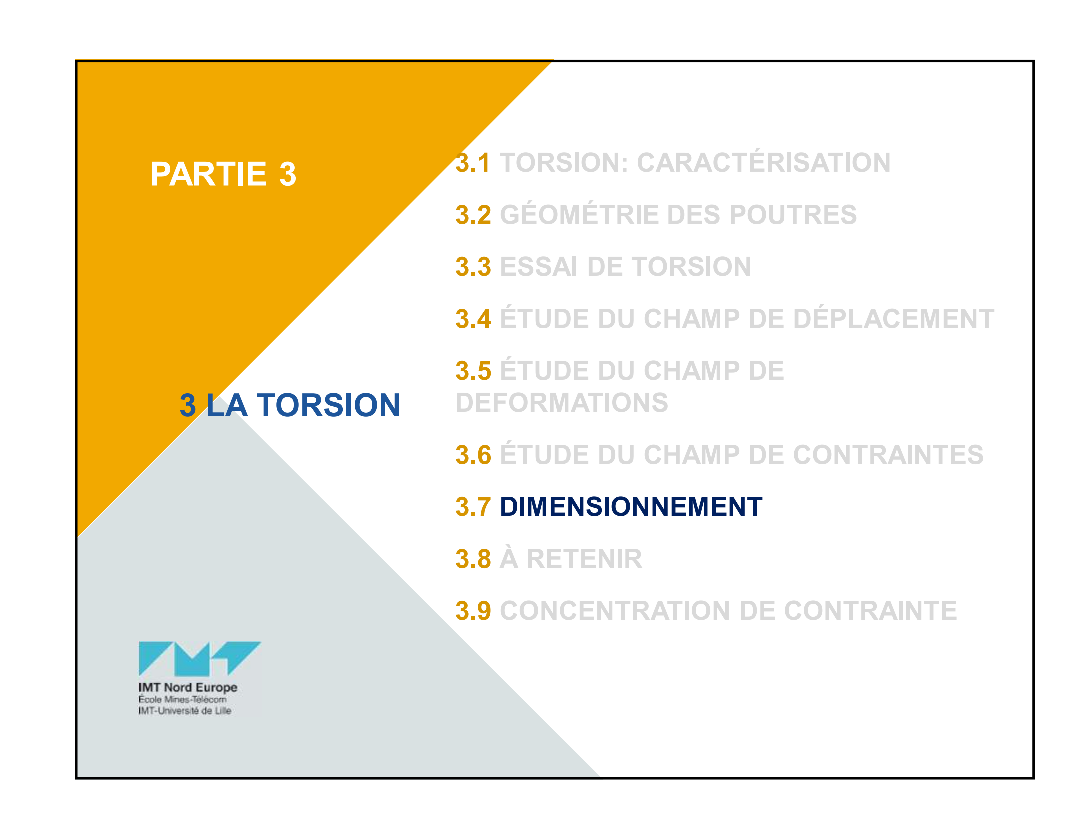
$$\left[\sigma(N)\right]_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & sin\beta \\ 0 & -sin\beta & cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & -sin\beta \\ 0 & sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & cos\beta\cdot\sigma_{xy} + sin\beta\cdot\sigma_{xz} & -sin\beta\cdot\sigma_{xy} + cos\beta\cdot\sigma_{xz} \\ cos\beta\cdot\sigma_{yx} + sin\beta\cdot\sigma_{zx} & 0 & 0 \\ -sin\beta\cdot\sigma_{yx} + cos\beta\cdot\sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille




3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
39
3.6.2 Torsion : Étude du champ de contraintes dans le repère polaire
Observons le champ de contraintes dans le repère polaire $(G,\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})$
$[\sigma(N)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\cdot\alpha\cdot r \\ 0 & 0 & 0 \\ G\cdot\alpha\cdot r & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{e_r},\vec{e_\theta})}$
α: angle unitaire de torsion
Vecteur de contrainte
$\overrightarrow{\sigma(N,\vec{x})} = \bar{\bar{\sigma}}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\cdot\alpha\cdot r \\ 0 & 0 & 0 \\ G\cdot\alpha\cdot r & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\G\cdot\alpha\cdot r\end{bmatrix}$
$\overrightarrow{\sigma(N,\vec{x})} = G\cdot\alpha\cdot r\cdot\vec{e_\theta}$ avec $\alpha = \frac{-M(x)}{G\cdot I_{G0}} = \frac{C(x)}{G\cdot I_{G0}}$
Diapo 34
Contrainte de cisaillement en fonction de α
$\tau(r) = G\cdot\alpha\cdot r \implies \tau_{max} = \tau(R) = G\cdot\alpha\cdot R$
Contrainte de cisaillement en fonction de $M(x)$
$\tau(r) = \frac{C(x)}{I_{G0}}r \implies \tau_{max} = \tau(R) = \frac{C(x)}{I_{G0}}R$
θ(x)
θ(L)
x
L
y
N
r
G
z
$0 \le r \le R$
Section : abscisse x
IMT Nord Europe


PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

3.7 DIMENSIONNEMENT

3.7 Torsion : Dimensionnement

41

Condition de résistance $|\tau_{max}| \leq \tau_u = R_{pg}$

R_{pg} **: Résistance pratique au glissement** $R_{pg} = \dfrac{R_{eg}}{s}$

- R_{eg} limite élastique au glissement du matériau
- **s** coefficient de sécurité (supérieur à 1).

$$|\tau_{max}| \leq R_{pg}$$

$$\frac{-C(x)}{I_{G0}} R_{max} \leq R_{pg}$$

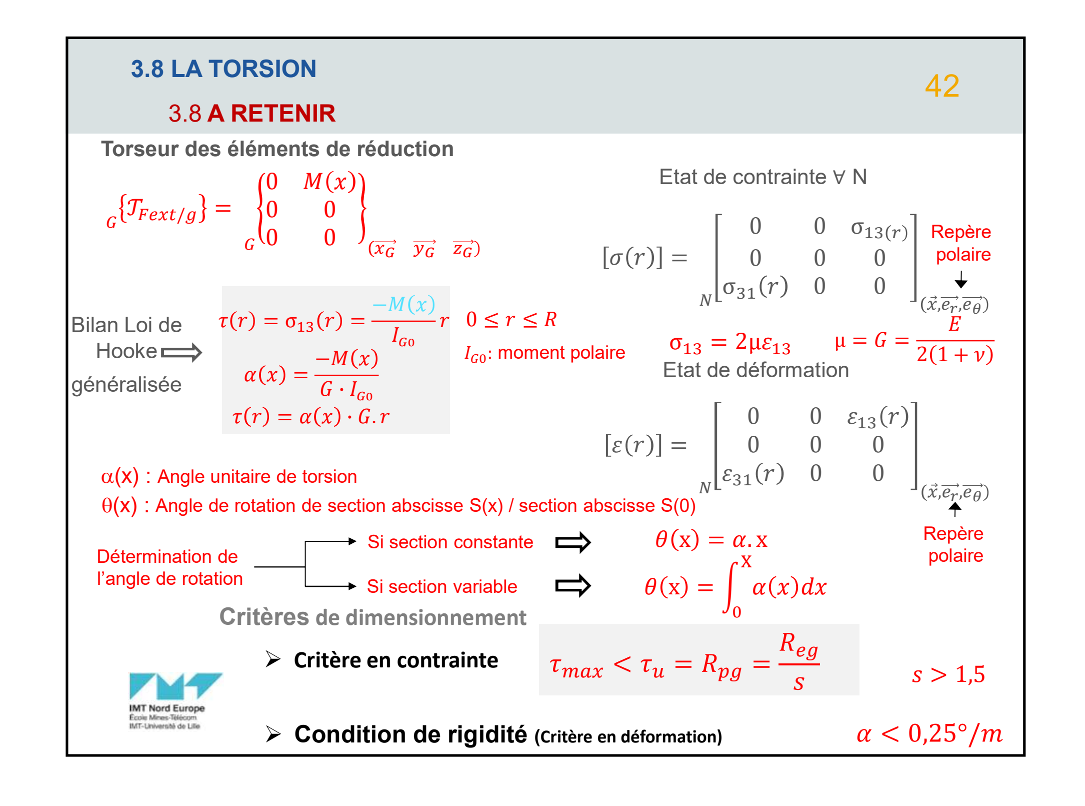
A la condition de résistance s'ajoute en torsion une **condition de rigidité**, qui limite l'angle unitaire de torsion à une valeur maximale au-delà de laquelle l'hypothèse de planéité de section n'est plus respectée.

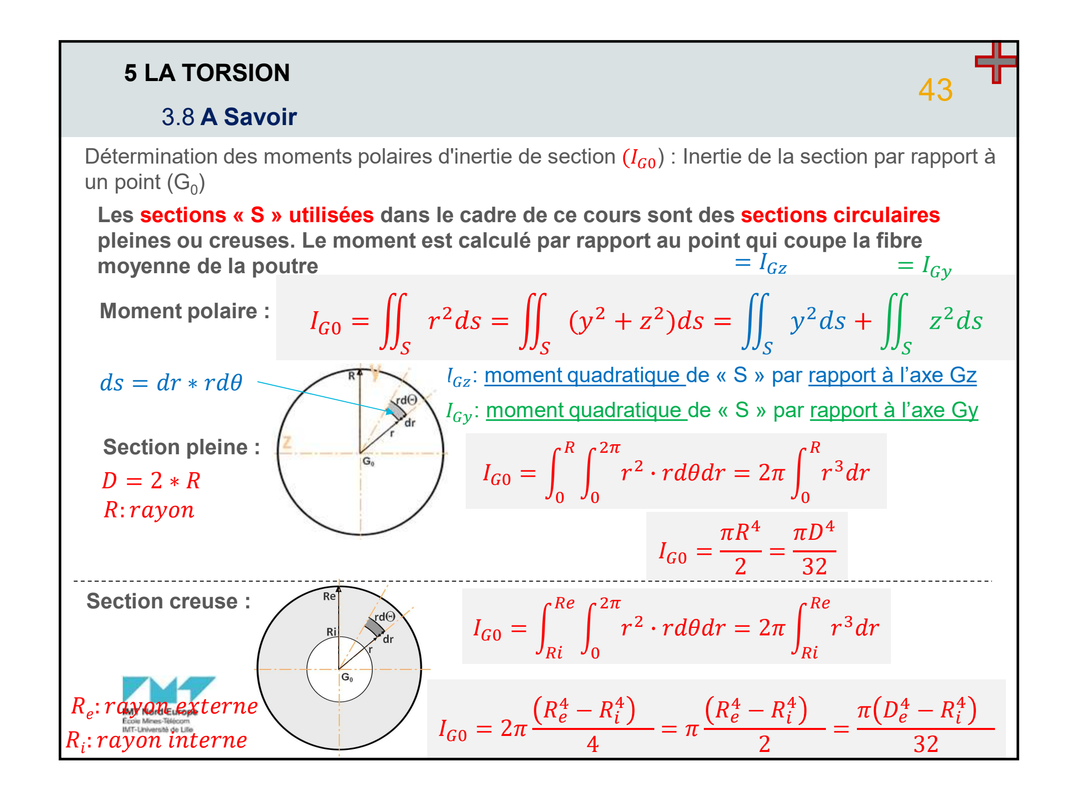
Condition de rigidité $\alpha_{max} = 0.25 deg/m$

L'angle unitaire de torsion α ne doit pas dépasser une valeur limite α max imposée par l'expérience (en pratique $\alpha_{max} = 0.25 deg/m$, en mécanique

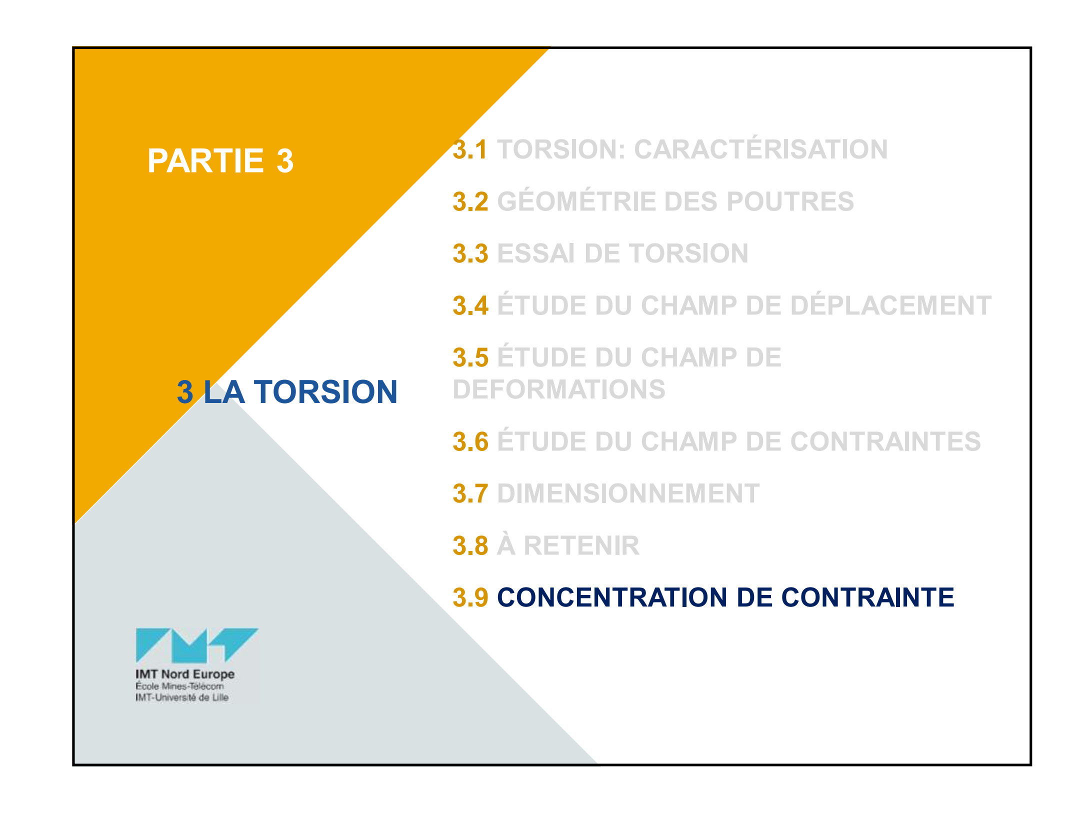
$$|\alpha| = \left|\frac{-M(x)}{G \cdot I_{G0}}\right| \leq \alpha_{max}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

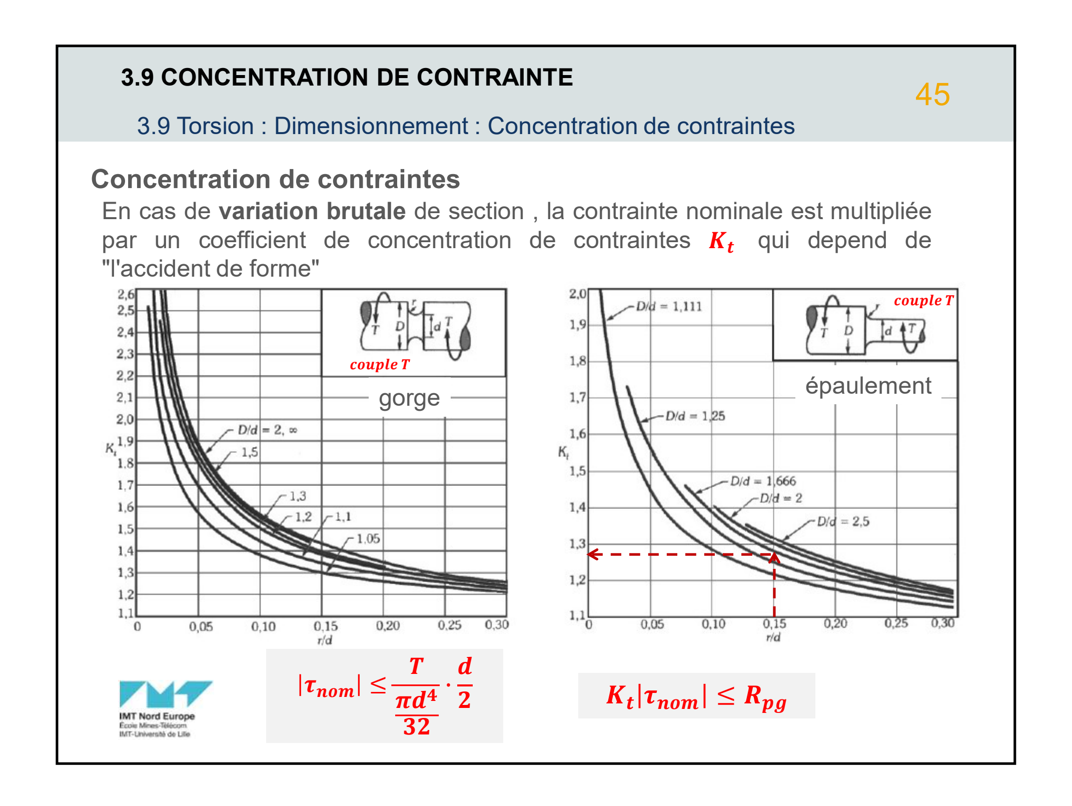


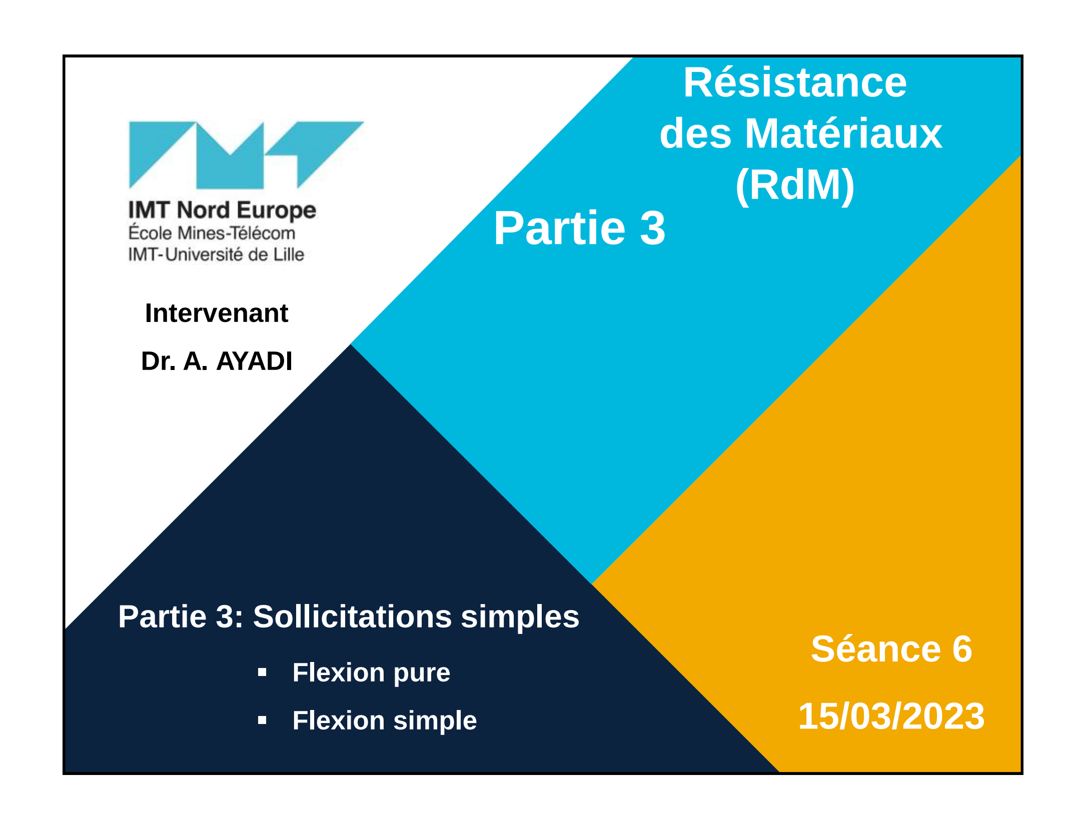


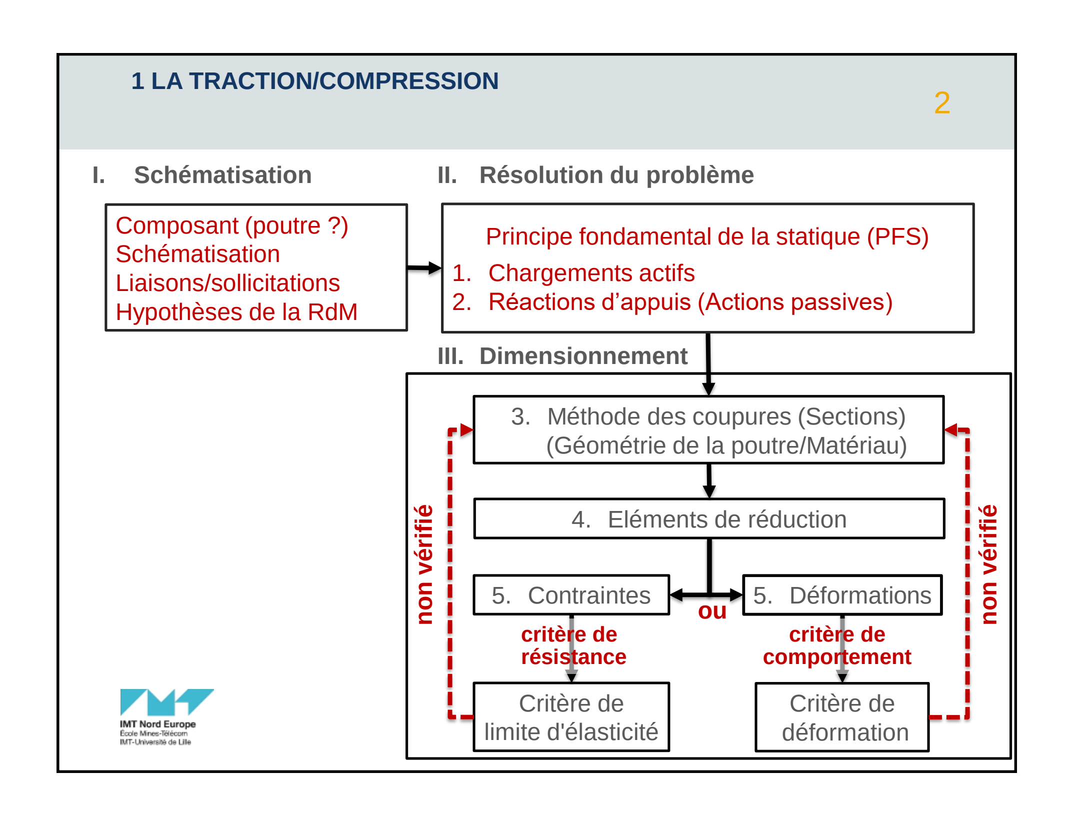
5 LA TORSION
3.8 A Savoir
43
Détermination des moments polaires d'inertie de section (I_{G0}) : Inertie de la section par rapport à un point (G_0)
Les sections « S » utilisées dans le cadre de ce cours sont des sections circulaires pleines ou creuses. Le moment est calculé par rapport au point qui coupe la fibre moyenne de la poutre
Moment polaire : $I_{G0} = \iint_S r^2 ds = \iint_S (y^2 + z^2) ds = \iint_S y^2 ds + \iint_S z^2 ds$, $= I_{Gz}$, $= I_{Gy}$
$ds = dr * rd\theta$
I_{Gz}: moment quadratique de « S » par rapport à l'axe Gz
I_{Gy}: moment quadratique de « S » par rapport à l'axe Gy
Section pleine :
$D = 2 * R$
$R: rayon$
$I_{G0} = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot rd\theta dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr$
$I_{G0} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$
Section creuse :
$I_{G0} = \int_{Ri}^{Re} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot rd\theta dr = 2\pi \int_{Ri}^{Re} r^3 dr$
$R_e: rayon\ externe$
$R_i: rayon\ interne$
$I_{G0} = 2\pi \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{4} = \pi \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{2} = \frac{\pi(D_e^4 - R_i^4)}{32}$



PARTIE 3
3 LA TORSION
3.1 TORSION: CARACTÉRISATION
3.2 GÉOMÉTRIE DES POUTRES
3.3 ESSAI DE TORSION
3.4 ÉTUDE DU CHAMP DE DÉPLACEMENT
3.5 ÉTUDE DU CHAMP DE DEFORMATIONS
3.6 ÉTUDE DU CHAMP DE CONTRAINTES
3.7 DIMENSIONNEMENT
3.8 À RETENIR
3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


3.9 CONCENTRATION DE CONTRAINTE
45
3.9 Torsion : Dimensionnement : Concentration de contraintes
Concentration de contraintes
En cas de variation brutale de section , la contrainte nominale est multipliée par un coefficient de concentration de contraintes K_t qui depend de "l'accident de forme"
couple T
gorge
D/d = 2, ∞
1,5
1,3
1,2
1,1
1,05
K_t
r/d
couple T
épaulement
D/d = 1,111
D/d = 1,25
D/d = 1,666
D/d = 2
D/d = 2,5
$|\tau_{nom}| \leq \frac{T}{\frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2}$
$K_t|\tau_{nom}| \leq R_{pg}$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


Résistance
des Matériaux
(RdM)
Partie 3
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Intervenant
Dr. A. AYADI
Partie 3: Sollicitations simples
Flexion pure
Flexion simple
Séance 6
15/03/2023


1 LA TRACTION/COMPRESSION
2
I. Schématisation
Composant (poutre ?)
Schématisation
Liaisons/sollicitations
Hypothèses de la RdM
II. Résolution du problème
Principe fondamental de la statique (PFS)
1. Chargements actifs
2. Réactions d'appuis (Actions passives)
III. Dimensionnement
3. Méthode des coupures (Sections)
(Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction
5. Contraintes
ou
5. Déformations
critère de résistance
critère de comportement
Critère de limite d'élasticité
Critère de déformation
non vérifié
non vérifié
IMT Nord Europe

1 LA TRACTION/COMPRESSION

1.1 Rappel: Sollicitations simples (Centre d'une section)

3

- Expression générale d'un torseur des éléments de reduction:

$$\left\{\mathcal{T}_{F_{ext/g}}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{ext}}\\ \overrightarrow{M_{ext}}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}N & Mx\\ Ty & My\\ Tz & Mz\end{matrix}\right\}_{G\,(\overrightarrow{x_G};\overrightarrow{y_G};\overrightarrow{z_G})}$$

Repère local (au point G)

Expression du torseur dépond de la position de la coupe fictive

- Selon les valeurs de la **résultante** $\overrightarrow{F_{ext}}$ et du **moment** $\overrightarrow{M_{ext}}$ du torseur des éléments de réduction $_G\{\mathcal{T}_{F_{ext/g}}\}$, on identifie **les sollicitations simples** auxquelles les poutres sont soumises:

Éléments de réduction ⇨

N	T_y ou T_z	M_x	M_y ou M_z	Sollicitations
≠0	=0	=0	=0	N<0 Traction N>0 Compression
=0	≠0	=0	=0	Cisaillement simple
=0	=0	≠0	=0	Torsion pure
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure
=0	≠0	=0	≠0	Flexion simple

Dans le cadre de ce cours, on traite principalement des problèmes plans (2D)

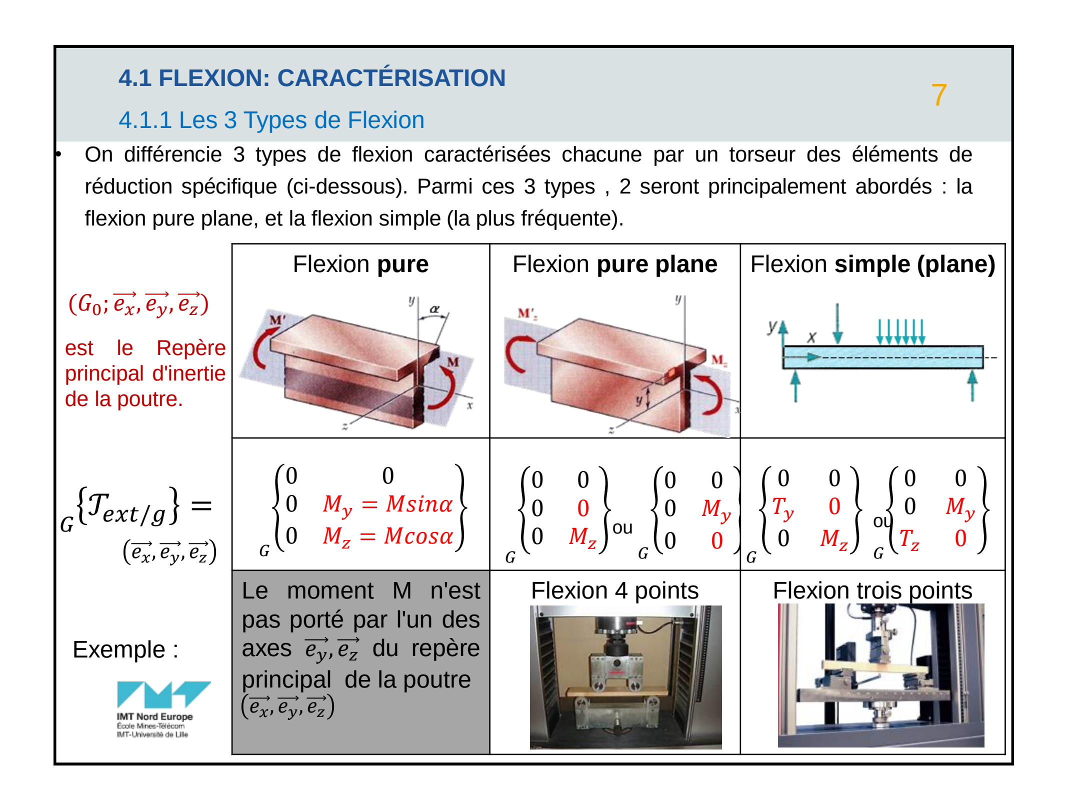
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

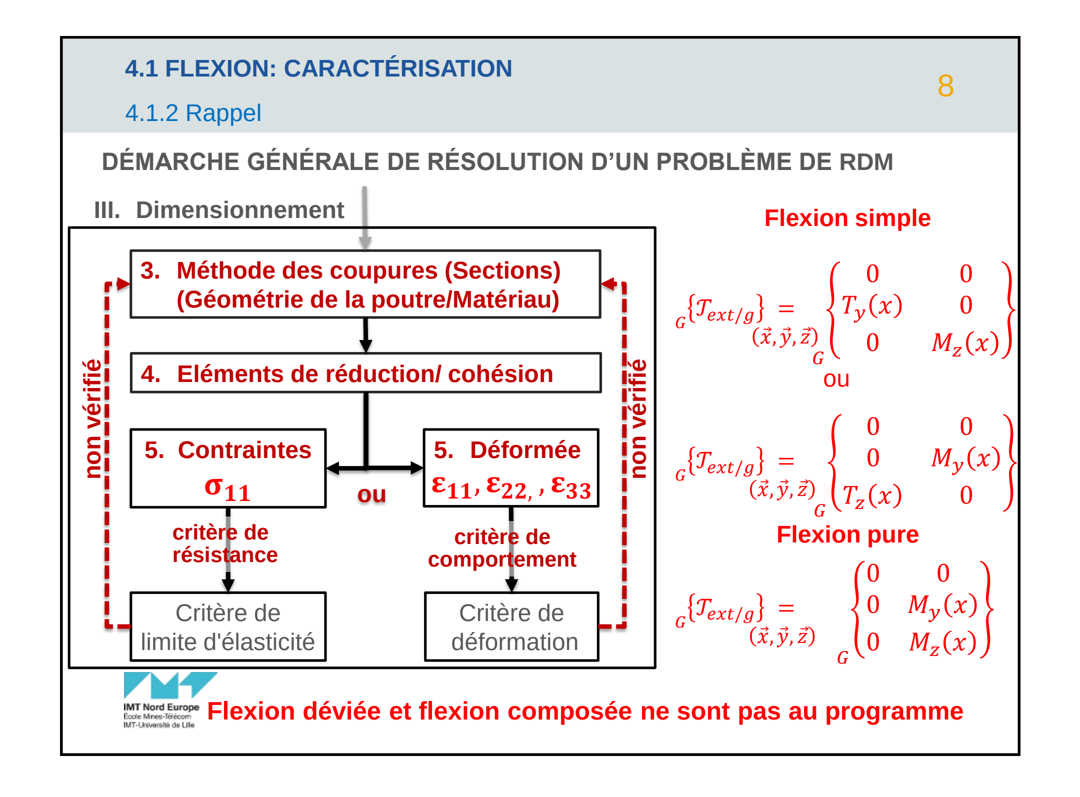
PARTIE 3

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


PARTIE 3
4 LA FLEXION
4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
4.2 LA FLEXION PURE
4.3 FLEXION PURE PLANE
4.4 LA FLEXION SIMPLE
4.5 EXEMPLES D'APPLICATION
4.6 LA FLEXION PURE PLANE (complément)
4.8 LA FLEXION DÉVIÉE (hors programme)
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


PARTIE 3
4 LA FLEXION
4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
1. 3 types de flexion
2. Rappel
3. Relation $T_y(x)$ et $M_z(x)$
4. hypothèses de la RDM flexion
4.2 LA FLEXION PURE
4.3 FLEXION PURE PLANE
4.4 LA FLEXION SIMPLE
4.5 EXEMPLES D'APPLICATION
4.6 LA FLEXION PURE PLANE (complément)
4.8 LA FLEXION DÉVIÉE (hors programme)
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
4.1.1 Les 3 Types de Flexion
7
On différencie 3 types de flexion caractérisées chacune par un torseur des éléments de réduction spécifique (ci-dessous). Parmi ces 3 types , 2 seront principalement abordés : la flexion pure plane, et la flexion simple (la plus fréquente).
Flexion pure
Flexion pure plane
Flexion simple (plane)
$(G_0; \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est le Repère principal d'inertie de la poutre.
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = _{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$
$_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y = Msin\alpha \\ 0 & M_z = Mcos\alpha \end{Bmatrix}$
$_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$ ou $_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
$_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$ ou $_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
Exemple :
Le moment M n'est pas porté par l'un des axes $\vec{e_y}, \vec{e_z}$ du repère principal de la poutre $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
Flexion 4 points
Flexion trois points
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
4.1.2 Rappel
8
DÉMARCHE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE RDM
III. Dimensionnement
3. Méthode des coupures (Sections) (Géométrie de la poutre/Matériau)
4. Eléments de réduction/ cohésion
5. Contraintes σ_{11}
ou
5. Déformée $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, , \varepsilon_{33}$
critère de résistance
critère de comportement
Critère de limite d'élasticité
Critère de déformation
non vérifié
non vérifié
Flexion simple
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = _G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}$
ou
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = _G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(x) \\ T_z(x) & 0 \end{Bmatrix}$
Flexion pure
$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = _G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(x) \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Flexion déviée et flexion composée ne sont pas au programme

4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION

9

4.1.3 Equations d'équilibre

N	T_y ou T_z	M_x	M_z ou M_y	Identification de la sollicitation
=0	≠0	=0	≠0	Flexion simple (plane)
=0	=0	=0	≠0	Flexion pure plane

Expression du torseur des Eléments de réduction

Flexion pure

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad ou = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(x) \\ T_z(x) & 0 \end{Bmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad ou = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(x) \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Expression des équations d'équilibre

$$\left.\begin{matrix} _G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {_G\{\mathcal{T}d \to g\}} \\ _G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {_G\{\mathcal{T}_{Fint \to (\Omega)}\}} \end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix} \iint_{(\Omega)} \sigma_n \, d\Omega = 0 & \iint_{(\Omega)} y \cdot \tau_z - z \cdot \tau_y \, d\Omega = 0 \\ T_y(x) + \iint_{(\Omega)} \tau_y \, d\Omega = 0 & M_y(x) + \iint_{(\Omega)} z \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \\ T_z(x) + \iint_{(\Omega)} \tau_z \, d\Omega = 0 & M_z(x) + \iint_{(\Omega)} y \cdot \sigma_n \, d\Omega = 0 \end{Bmatrix}_{G\,(\overrightarrow{x_G}\ \overrightarrow{y_G}\ \overrightarrow{z_G})}$$

Trois cas sont possibles:
$T_y(x) = M_z(x) = 0$
ou $T_z(x) = M_y(x) = 0$
ou $T_z(x) = T_y(x) = 0$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

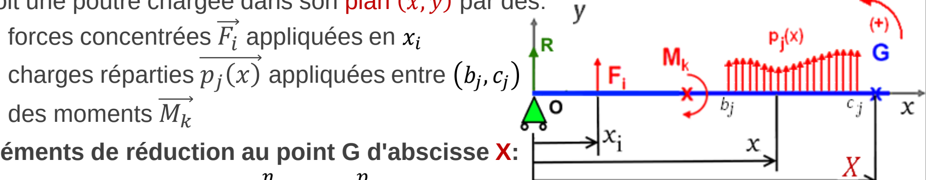
4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION

10

4.1.4 Relation effort tranchant-moment fléchissant : <u>flexion simple</u>

Soit une poutre chargée dans son plan $(\vec{x},\vec{y})$ par des:

- forces concentrées $\vec{F_i}$ appliquées en x_i
- charges réparties $\overrightarrow{p_j(x)}$ appliquées entre (b_j, c_j)
- des moments $\overrightarrow{M_k}$



Eléments de réduction au point G d'abscisse X:

$$\begin{cases} T_y(X) = R + \sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{j=1}^{p} \int_{b_j}^{c_j} p_j(x)dx \\ M_z(X) = \sum_{k=1}^{m} M_k - RX - \sum_{i=1}^{n} F_i(X - x_i) - \sum_{j=1}^{p} \int_{b_j}^{c_j} p_j(x)(X - x)dx \end{cases}$$

Par dérivation de $M_z(X)$ par rapport à X, on constate que $M_z(X)$ est lié à $T_y(X)$ par une relation de dérivation en effet:

$$\frac{dM_z(X)}{dX} = -R - \sum_{i=1}^{n} F_i - \sum_{j=1}^{p} \int_{b_j}^{c_j} p_j(x)dx = -T_y(X) \Longrightarrow \boxed{\frac{dM_z(X)}{dX} = -T_y(X)}$$

Par analogie, un calcul suivant le même raisonnement dans le plan $(\vec{x},\vec{z})$ donne:

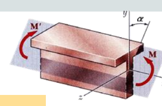
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dM_y(X)}{dX} = T_z(X)}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION

4.1.4 Relation effort tranchant-moment fléchissant : **flexion pure**

11



Dans le cas de la **flexion pure**: $\vec{T} = \vec{0} \implies T_y = 0 \ , T_z = 0$

flexion pure:
- Pas d'efforts tranchants → Pas de contrainte de cisaillement
- Flexion induite par des couples directement opposés

$$_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}_G \quad \vec{T} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{M}}{dX} = -T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \implies \boxed{\frac{d\vec{M}}{dX} = \vec{0}}$$

Si le problème est dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ $\quad \dfrac{dM_z(X)}{dX} = 0$

Si le problème est dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$ $\quad \dfrac{dM_y(X)}{dX} = 0$

Le moment fléchissant M d'une poutre **chargée en flexion pure** $(\vec{T} = \vec{0})$ **est constant**.

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

X: abcisse du centre d'inertie G d'une section virtuelle (voir slide d'avant)

4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION

4.1.5 Quelques hypothèses de la RdM dans le cadre de la flexion

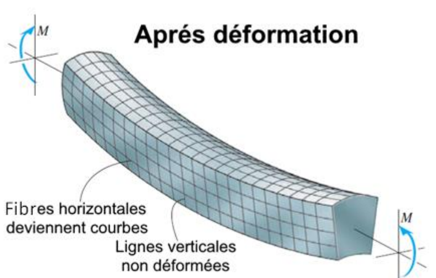
12

❑ **Hypothèses**

- Les poutres considérées ont des sections droites ayant un axe de symétrie $(G, \vec{y})$
- Le comportement du matériau reste linéaire élastique
- L'hypothèse de Bernoulli est vérifiée: Toute section **plane avant déformation** se transforme en une section **plane après déformation**.

Avant déformation

Aprés déformation



❑ **Remarque**



Pour la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$utilisée par la suite, les axes $\vec{y}, \vec{z}$ seront **toujours les axes principaux de la section de la poutre**, c'est dans ce repère que sont toujours déterminés les éléments de réduction, les matrices de contraintes et de déformations.

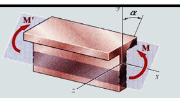
PARTIE 3

4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.2 FLEXION PURE

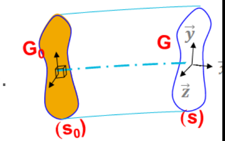
4.2.1 Flexion pure : champ de contraintes



14

En **flexion pure**, l'effort tranchant $\vec{T} = \vec{0} \implies T_z(x) = 0, T_y(x) = 0$

la contrainte de cisaillement $\overrightarrow{\tau(M)}$ est nulle dans toute section droite.



Ainsi, **en tout point M(x,y,z) de la section (S)** de la poutre, le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{x})$ s'exprime par:

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}(M,\vec{x}) &= \sigma_{xx}(x,y,z)\vec{x} + \overrightarrow{\tau(M)} \\ \overrightarrow{\tau(M)} &= \sigma_{yx}\vec{y} + \sigma_{zx}\vec{z} = \vec{0} \end{aligned}\right\} \implies \vec{T}(M,\vec{x}) = \sigma_{xx}(x,y,z)\vec{x}$$

- Le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{x})$ se réduit à sa composante normale:

$$\sigma_{yx} = \frac{T_y}{S} = 0 \qquad \sigma_{zx} = \frac{T_z}{S} = 0$$

$$\vec{T}(M,\vec{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice d'état de contraintes, dans le repère (de la section), n'a qu'une seule composante non nulle et elle s'écrit :

$${}_M[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le champ de contraintes est uni-axial



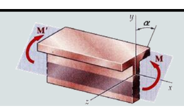
PARTIE 3

4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.2 FLEXION PURE

4.2.2 Flexion pure: champ de déformation



16

La poutre est constituée d'un matériau élastique, isotrope et homogène, on utilise la loi de Hooke généralisée pour déterminer à partir du champ de contraintes $_M[\sigma]$ le champ de déformation $_M[\varepsilon]$:

loi de Hooke généralisée $\Rightarrow \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{E} - \nu \frac{\sigma_{jj}+\sigma_{kk}}{E}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{E} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}+\sigma_{xx}}{E} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{E} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \end{cases}$$

G₀ G $\vec{y}$ $\vec{x}$ $\vec{z}$ (S_0) (S)

Ainsi, en flexion pure, **en tout point M(x,y,z) de la section (S)** de la poutre:

$$avec\ _M[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M\,(\vec{x};\vec{y};\vec{z})} \Longrightarrow\ _M[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

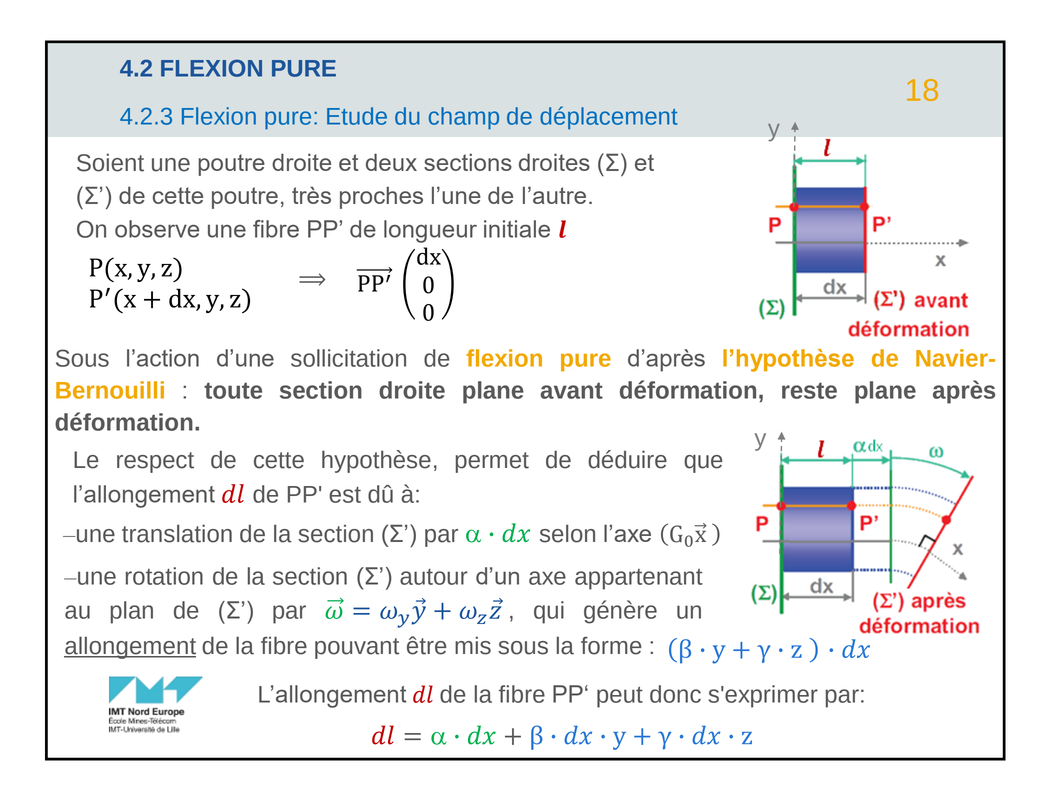
$_M[\sigma] = \bar{\bar{\sigma}}(M)$ $_M[\varepsilon] = \bar{\bar{\varepsilon}}(M)$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

PARTIE 3

4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



4.2 FLEXION PURE

4.2.3 Flexion pure: Etude du champ de déplacement

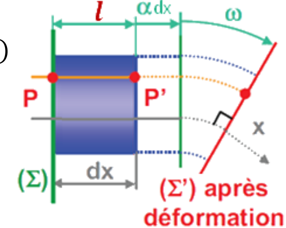
19

L'allongement dl d'une fibre PP'

$P(x, y, z)$

$P'(x + dx, y, z)$

$$dl = \underbrace{\alpha \cdot dx}_{\text{translation de la section droite } (\Sigma')} + \underbrace{\beta \cdot dx \cdot y + \gamma \cdot dx \cdot z}_{\text{rotation de la section droite } (\Sigma')}$$



L'allongement dl d'une fibre PP' est une fonction linéaire en y et z

On peut en déduire la déformation normale ε_{xx} de la fibre PP'

L'expression générale de ε_{xx} au point $P(x, y, z)$ d'une poutre soumise à **flexion pure** :

$$\varepsilon_{xx}\big(P(x, y, z)\big) = \varepsilon_{xx}(y, z) = \lim_{dx \to 0} \frac{dl}{dx} = \alpha + \beta y + \gamma z$$



α ; β et γ sont des inconnues à détéerminer par la suite

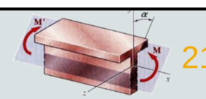
PARTIE 3

4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.2 FLEXION PURE

4.2.4 Flexion pure : Equations d'équilibre



21

Equations d'équilibre d'une section

$${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = \{0\}$$

$${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint/(S)}\} = \{0\}$$

(G centre de gravité de la section)

$$_G\begin{Bmatrix} \iint_S \sigma_{xx} dS = 0 & \dots \\ \dots & M_y + \iint_S z.\sigma_{xx} dS = 0 \\ \dots & M_z - \iint_S y.\sigma_{xx} dS = 0 \end{Bmatrix}$$

Pour tout point M(x,y,z) de la section (S) de la poutre sollicitée en flexion pure :

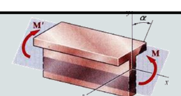
$${}_M[\sigma] = {}_M\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$

L'étude des équations d'équilibre va permettre d'exprimer σ_{xx} en fonction de M_y et M_z



4.2 FLEXION PURE

4.2.4 Flexion pure : Equations d'équilibre



22

$${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{d/g}\} = \{0\}$$

$${}_G\{\mathcal{T}_{ext/g}\} + {}_G\{\mathcal{T}_{Fint/(S)}\} = \{0\}$$

$$_G\begin{Bmatrix} \iint_S \sigma_{xx} dS = 0 & \dots \\ \dots & M_y + \iint_S z.\sigma_{xx} dS = 0 \\ \dots & M_z - \iint_S y.\sigma_{xx} dS = 0 \end{Bmatrix}$$

(G centre de gravité de la section)

En rappelant l'expression de:

- la loi de Hooke uni-axiale: $\sigma_{xx} = \mathbf{E}\ \varepsilon_{xx}$
- ε_{xx} pour la **flexion pure** : $\varepsilon_{xx} = \alpha + \beta y + \gamma z$

Alors, **la contrainte normale** (σ_{xx}) s'exprime par: $\sigma_{xx} = k_1 + k_2 y + k_3 z$

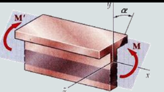
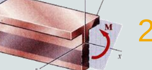
$$\Rightarrow \begin{cases} \iint_S (k1 + k2\ y + k3\ z) dS = 0 \\ M_y + \iint_S z.\sigma_{xx} dS = 0 \\ M_z - \iint_S y.\sigma_{xx} dS = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 S + k_2 \iint_S y dS + k_3 \iint_S z dS = 0 \\ M_y + \iint_S z.\sigma_{xx} dS = 0 \\ M_z - \iint_S y.\sigma_{xx} dS = 0 \end{cases}$$

$\iint_S y dS$ et $\iint_S z dS$: moments statiques calculés par rapport aux axes principaux de section (tjs nuls) ⇨ $k_1 = 0$ ⇨ $(\alpha = 0)$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.2 FLEXION PURE

4.2.4 Flexion pure : Equations d'équilibre

23

$$(\ldots) \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ M_y + \iint_S z(k_2 y + k_3 z)dS = 0 \\ M_z - \iint_S y(k_2 y + k_3 z)dS = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ M_y + k_2 \iint_S zydS + k_3 \iint_S z^2\,dS = 0 \\ M_z - k_2 \iint_S y^2 dS - k_3 \iint_S zydS = 0 \end{cases}$$

$\iint_S zydS$ produit d'inertie de la section S par rapport à ses axes principaux est tjs nul

$\iint_S y^2 dS$ $\iint_S z^2 dS$ Moments quadratiques d'inertie de la section S par rapport à ses axes principaux

$$I_{Gyz} = \iint_S y.z\,dS = 0 \qquad I_y = I_{Gy} = \iint_S z^2\,dS \qquad I_z = I_{Gz} = \iint_S y^2 dS$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ M_y + k_2 \iint_S zydS + k_3 \iint_S z^2\,dS = 0 \\ M_z - k_2 \iint_S y^2 dS - k_3 \iint_S zydS = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ M_y + k_3 \boldsymbol{I_y} = 0 \\ M_z - k_2 \boldsymbol{I_z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_3 = -\dfrac{M_y}{I_{Gy}} \\ k_2 = \dfrac{M_z}{I_{Gz}} \end{cases}$$



Ainsi, la contrainte normale σ_{xx} s'exprime par:

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_{Gz}} y - \frac{M_y}{I_{Gy}} z$$

4.2 FLEXION PURE

4.2.4 Flexion pure : Equations d'équilibre d'une section (**Synthèse**)

24

Expression de la contrainte normale σ_{xx} en fonction de M_y et M_z :

Flexion pure cas général $M_z \neq 0 \;et\; M_y \neq 0$	$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_{Gz}} y - \frac{M_y}{I_{Gy}} z$	$\varepsilon_{xx} = \frac{M_z}{E \cdot I_{Gz}} y - \frac{M_y}{E.I_{Gy}} z$
Flexion pure plane dans le plan (x,y) $M_z \neq 0 \;et\; M_y = 0$	$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_{Gz}} y$	$\varepsilon_{xx} = \frac{M_z}{E \cdot I_{Gz}} y$
Flexion pure plane dans le plan (x,z) $M_z = 0 \;et\; M_y \neq 0$	$\sigma_{xx} = -\frac{M_y}{I_{Gy}} z$	$\varepsilon_{xx} = -\frac{M_y}{E.I_{Gy}} z$

Expression des matrices d'état de contraintes et de déformation

$${}_M[\sigma] = {}_M\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad {}_M[\sigma] = {}_M\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{xx} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

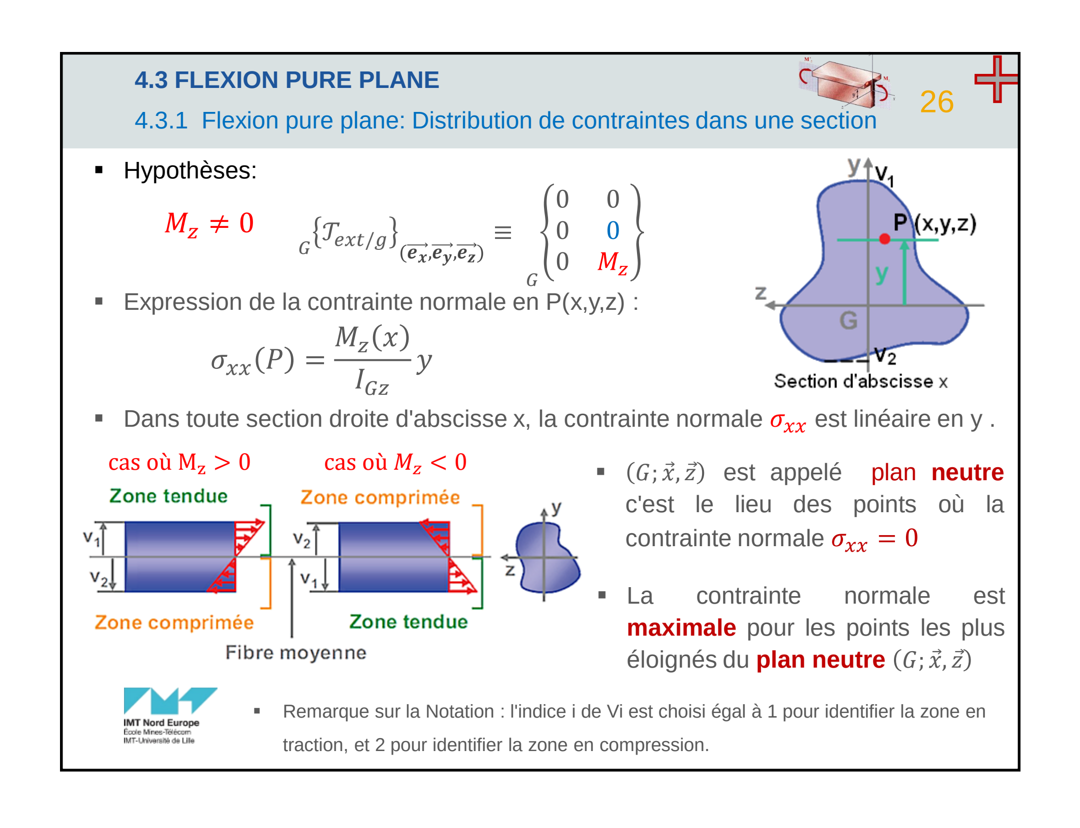
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

En flexion pure l'état de contraintes est uniaxial

PARTIE 3

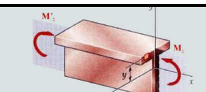
4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



4.3 FLEXION PURE PLANE

4.3.2 Flexion pure plane : Dimensionnement



27

❑ **Cas des matériaux symétriques:**

- Pour un matériau symétrique les limites élastiques en traction R_e et en compression R'_e sont égales (en valeur absolue):

$$R_e = |R'_e|$$

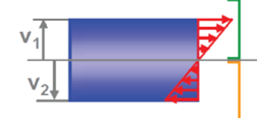
- La **contrainte limite utile** (σ_u) en flexion pure correspond à:

$$\sigma_u = \frac{R_e}{s}$$

s (> 1): coefficient de sécurité

- La **condition de résistance** d'une poutre sollicitée en flexion doit respecter : la contrainte maximale (σ_{xx_max}) inférieure à la contrainte limite d'utilisation :

$$\sigma_{xx_max} \le \sigma_u$$



- La **condition de résistance** s'écrit donc aussi sous la forme:



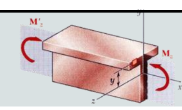
$$\frac{|M_z|}{I_{Gz}} v \le \sigma_u$$

avec $v = \sup(V_1, V_2)$



4.3 FLEXION PURE PLANE

4.3.2 Flexion pure plane : Dimensionnement



28

❑ **Cas des matériaux non symétriques** $(R_e \neq |R'_e|)$





- Le dimensionnement de la poutre doit vérifier **deux équations** de résistance :



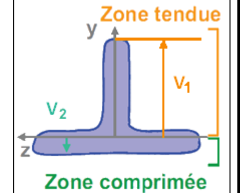
- Dans la zone tendue:
- Dans la zone comprimée:



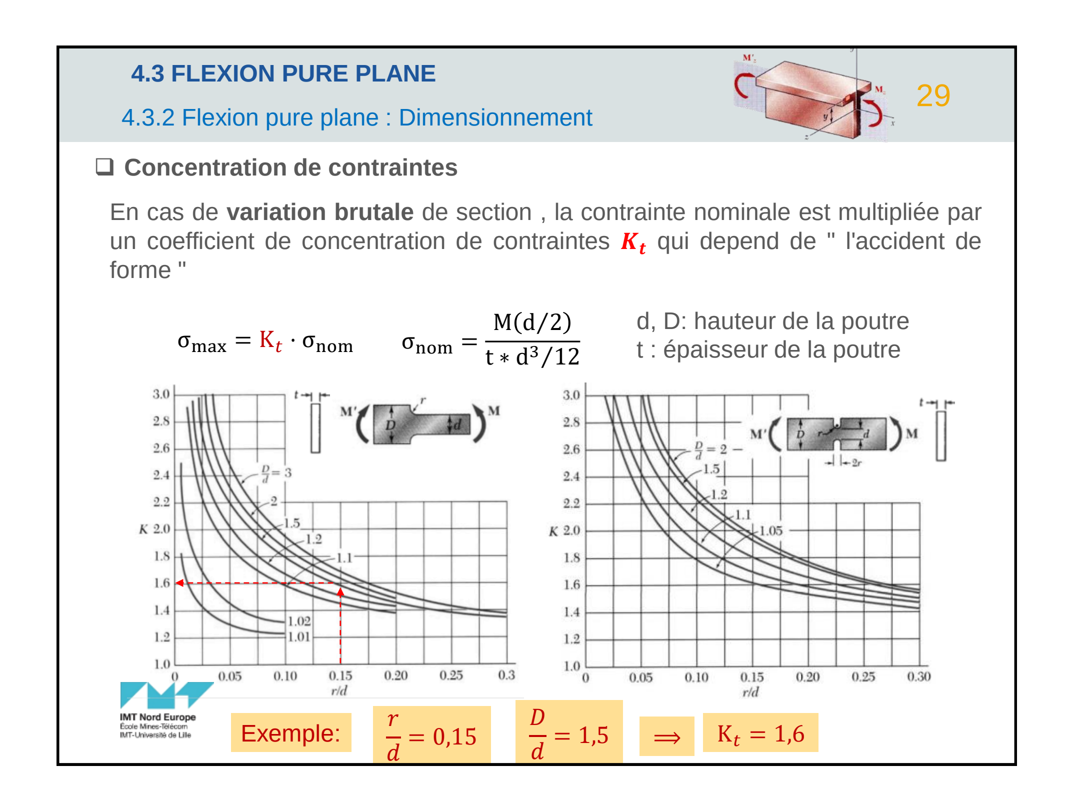
$$|\sigma_{xx}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} V_1 \le \sigma_u \quad \text{et} \quad |\sigma_{xx}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} V_2 \le \sigma'_u$$

- De nombreux matériaux, comme **la fonte** ou **le béton**, ont une limite élastique en traction nettement inférieure à leur limite élastique en compression **($\sigma_e \ll |\sigma'_e|$).**

- Pour **éviter le sur-dimensionnement** de la zone comprimée dans le cas de poutres formées par ces matériaux, le concepteur doit **optimiser** la géométrie de la section droite de façon à **minimiser** la contrainte maximale de traction.



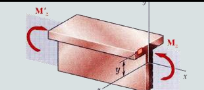



4.3 FLEXION PURE PLANE
4.3.2 Flexion pure plane : Dimensionnement
29
Concentration de contraintes
En cas de variation brutale de section , la contrainte nominale est multipliée par un coefficient de concentration de contraintes K_t qui depend de " l'accident de forme "
$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$
$\sigma_{nom} = \frac{M(d/2)}{t * d^3/12}$
d, D: hauteur de la poutre
t : épaisseur de la poutre
K
r/d
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Exemple:
$\frac{r}{d} = 0,15$
$\frac{D}{d} = 1,5$
$\Rightarrow$
$K_t = 1,6$


PARTIE 3
4 LA FLEXION
4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
4.2 LA FLEXION PURE
4.3 FLEXION PURE PLANE
1. Distribution de contraintes dans une section
2. Dimensionnement
3. Déformée en flexion pure plane
4. Flexion circulaire
5. Déflexion, comportement des fibres
6. Essai de flexion 4 points
4.4 LA FLEXION SIMPLE
4.5 EXEMPLES D'APPLICATION
4.6 LA FLEXION PURE PLANE (complément)
4.8 LA FLEXION DÉVIÉE (hors programme)
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.3 FLEXION PURE PLANE

4.3.3 Déformée en flexion pure plane (plan (x,y))



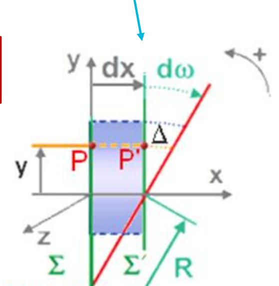
31

- Soient une poutre droite et deux sections droites (Σ) et (Σ') de cette poutre (très proches l'une de l'autre) et une fibre (PP') située à la cote y suivant l'axe (P,$\vec{y}$), de longueur dx avant déformation.
- **Après déformation** sous une sollicitation de flexion pure plane (plan (x,y)), la fibre (PP') subit :
- Un allongement Δ suivant l'axe (P,$\vec{x}$), tel que:

l
P
P'
y
x
dx
(Σ)
(Σ')
avant
déformation

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_{Gz}} y \Longrightarrow \boxed{\Delta = \varepsilon_{xx} \cdot dx = \frac{\sigma_{xx}}{E} \cdot dx = \frac{M_z}{E.I_{Gz}} y \cdot dx}$$

La section droite (Σ') subit une rotation d'un angle infinitésimal $d\omega$ dans le plan (x,y) autour de z par rapport à son orientation initiale (**petites déformations**):

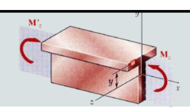




$$\boxed{tg(d\omega) \approx d\omega = -\frac{\Delta}{y} = -\frac{M_z}{E.I_{Gz}} dx}$$

4.3 FLEXION PURE PLANE

4.3.3 Déformation en flexion pure plane (plan (x,y))



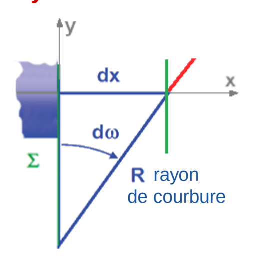
32

$$\boxed{d\omega = -\frac{M_z}{E.I_{Gz}} dx} \; ① \quad \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = -\frac{M_z}{E.I_{Gz}} \quad \Rightarrow \left| \frac{d\omega/dx}{M_z} \right| = \frac{1}{E.I_{Gz}}$$

- Le terme $\left| \frac{d\omega/dx}{M_z} \right|$ est appelé **flexibilité** de la poutre.
- Le terme $E.I_{Gz}$ est appelé **coefficient de rigidité à la flexion** de la poutre selon l'axe (G; $\vec{z}$).
- Pour caractériser **la flèche en flexion pure** de la poutre dans son ensemble, en RdM on cherche à déterminer **la "déformée" de la fibre moyenne**.
- La variation angulaire $d\omega$ permet de déterminer le rayon de courbure R de cette **fibre moyenne fléchie** :

$$d\omega \approx sin(d\omega) = \frac{dx}{R} \qquad \Rightarrow R = \frac{dx}{d\omega}$$

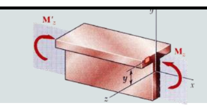
$$① \Rightarrow R = \frac{dx}{d\omega} = -\frac{E.I_{Gz}}{M_z}$$





4.3 FLEXION PURE PLANE

4.3.4 Flexion circulaire



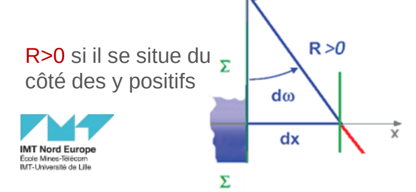
33

❑ **Flexion circulaire**

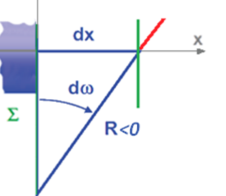
$$R = -\frac{E.I_{Gz}}{M_z}$$

- Soit une poutre :
  - Elle possède une section droite uniforme (même section droite partout) alors I_{Gz} est constant.
  - Le moment de flexion M_z appliquée est constant tout le long de la poutre
- Dans ce cas :
  - Le rayon de courbure R est constant.
  - **la déformée** de la poutre décrit **un arc de cercle** et on parle de **flexion circulaire.**

R>0 si il se situe du côté des y positifs



R<0 si il se situe du côté des y négatifs



IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.3 FLEXION PURE PLANE

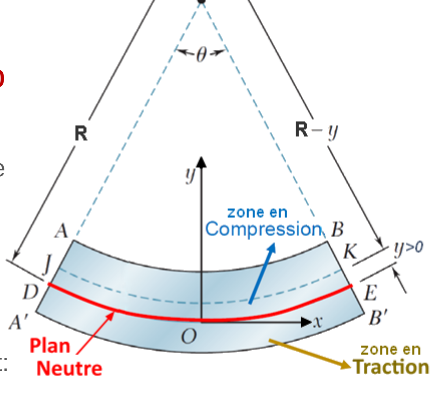
4.3.5 Déflexion, comportement des fibres / plan neutre

34

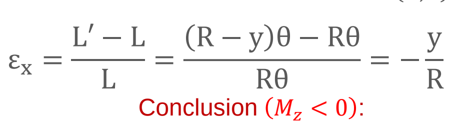
- La **déflexion** de la poutre se fait suivant un arc de cercle de rayon R
- Soit une fibre (JK) située à une distance **y>0** et qui est parallèle à la fibre neutre (*DE*)
- La longueur initiale **L** de la poutre est celle de la fibre neutre: $L = R\theta$
- La longueur après déformation:

$$L' = (R - y)\theta$$

- La déformation axiale suivant l'axe $(0,\vec{x})$ est:



Le cas de la figure $M_z < 0$

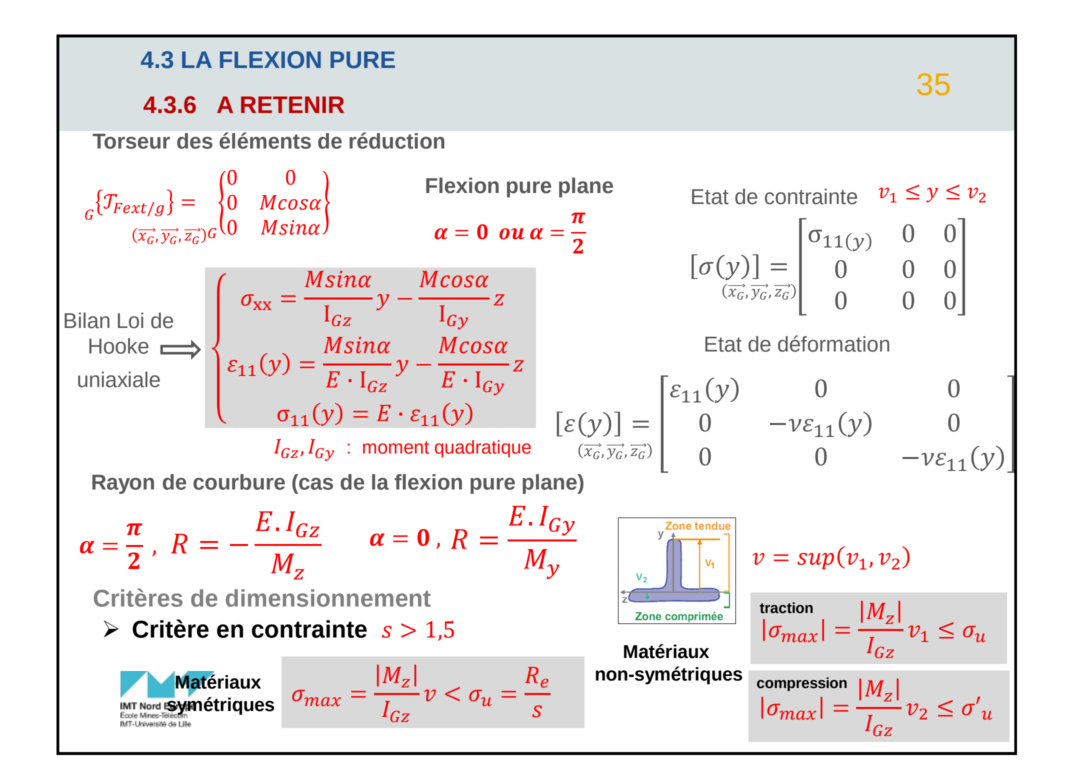


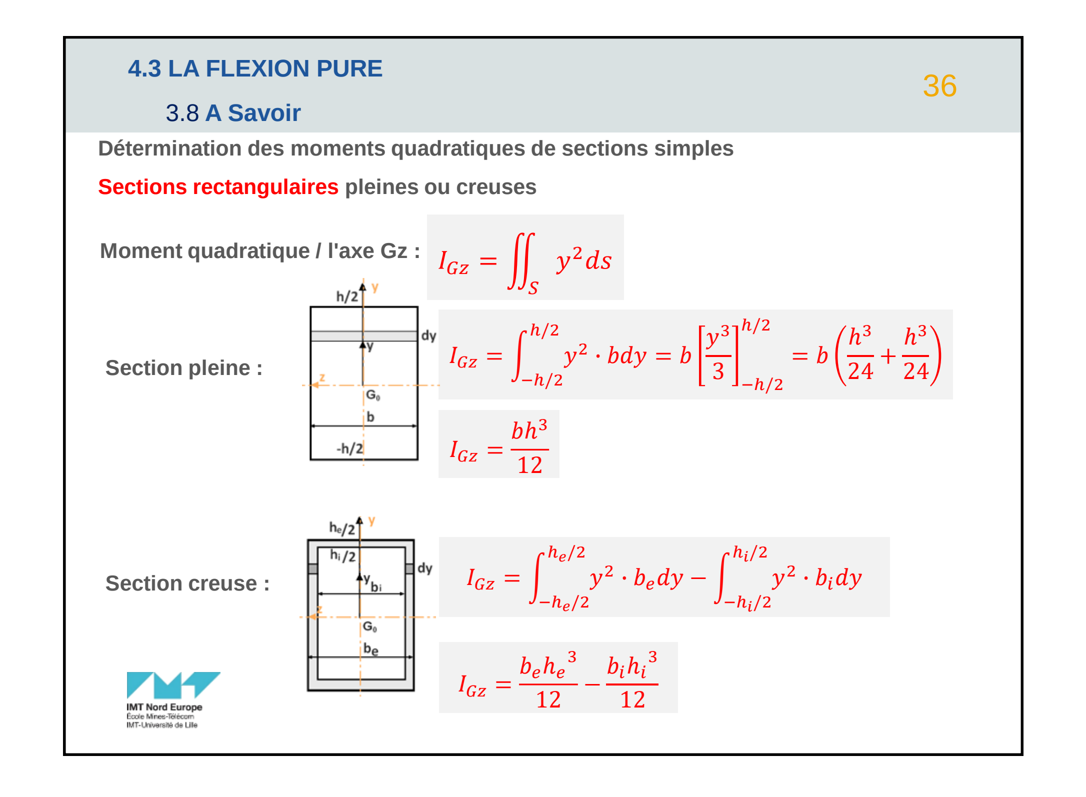
$$\varepsilon_x = \frac{L' - L}{L} = \frac{(R - y)\theta - R\theta}{R\theta} = -\frac{y}{R}$$

Conclusion ($M_z < 0$):



- Les fibres situées au dessus du plan neutre (y>0) sont comprimées.
- Les fibres situées en dessous du plan neutre (y<0) sont tendues.


4.3 LA FLEXION PURE
4.3.6 A RETENIR
35
Torseur des éléments de réduction
$_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mcos\alpha \\ 0 & Msin\alpha \end{Bmatrix}_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})G}$
Flexion pure plane
$\alpha = 0 \ ou \ \alpha = \frac{\pi}{2}$
Etat de contrainte $v_1 \leq y \leq v_2$
$[\sigma(y)]_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Bilan Loi de Hooke uniaxiale
$\sigma_{xx} = \frac{Msin\alpha}{I_{Gz}} y - \frac{Mcos\alpha}{I_{Gy}} z$
$\varepsilon_{11}(y) = \frac{Msin\alpha}{E \cdot I_{Gz}} y - \frac{Mcos\alpha}{E \cdot I_{Gy}} z$
$\sigma_{11}(y) = E \cdot \varepsilon_{11}(y)$
I_{Gz}, I_{Gy} : moment quadratique
Etat de déformation
$[\varepsilon(y)]_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(y) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{11}(y) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{11}(y) \end{bmatrix}$
Rayon de courbure (cas de la flexion pure plane)
$\alpha = \frac{\pi}{2}, \ R = -\frac{E.I_{Gz}}{M_z}$
$\alpha = 0, \ R = \frac{E.I_{Gy}}{M_y}$
Zone tendue
Zone comprimée
$v = sup(v_1, v_2)$
Critères de dimensionnement
Critère en contrainte $s > 1,5$
Matériaux Symétriques
$\sigma_{max} = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} v < \sigma_u = \frac{R_e}{s}$
Matériaux non-symétriques
traction
$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} v_1 \leq \sigma_u$
compression
$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} v_2 \leq \sigma'_u$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille


4.3 LA FLEXION PURE
3.8 A Savoir
36
Détermination des moments quadratiques de sections simples
Sections rectangulaires pleines ou creuses
Moment quadratique / l'axe Gz :
$I_{Gz} = \iint_S y^2 ds$
Section pleine :
$I_{Gz} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = b\left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24}\right)$
$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$
Section creuse :
$I_{Gz} = \int_{-h_e/2}^{h_e/2} y^2 \cdot b_e dy - \int_{-h_i/2}^{h_i/2} y^2 \cdot b_i dy$
$I_{Gz} = \frac{b_e h_e{}^3}{12} - \frac{b_i h_i{}^3}{12}$
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

PARTIE 3

4 LA FLEXION

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.4 LA FLEXION SIMPLE

38

4.4.1 Mise en place du problème

→ On se place dans le cas de la flexion simple où les éléments de réduction, dans une section droite quelconque, sont :

$$_G\{\mathcal{T}_{ext}\} \equiv {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}_{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})}$$

→ On s'intéressera tout d'abord au cas où: $\begin{cases} M_z \neq 0 \,,\, M_y = 0 \;\; \textit{moment fléchissant} \\ T_y \neq 0 \,,\, T_z = 0 \;\; \textit{effort tranchant} \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{dM_z}(x)}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{T_y}(x)$$

→ On décomposera le champ de contraintes en :

- contraintes dues à M_3 $\Rightarrow \sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$
- contraintes dues à T_2 $\Rightarrow \vec{\tau} = \sigma_{yx}\vec{e_y} + \sigma_{zx}\vec{e_z}$

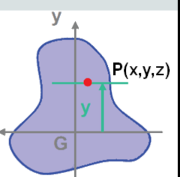


Le résultat global sera obtenu **par superposition** de ces deux champs de contraintes.

4.4 LA FLEXION SIMPLE

39

4.4.2 Évaluation des contraintes



❑ **Contraintes dues à l'effort tranchant**

Les contraintes dues à l'effort tranchant sont négligeables comparées à celles dues au moment de flexion. (démonstration non abordée dans ce cours)

❑ **Contraintes dues au moment fléchissant**

Les contraintes sont identiques à celles calculées en flexion pure, à la différence près que, ici, le moment fléchissant M_z est une fonction de x.

M_z génère donc des contraintes $\sigma_{xx}(x)$, normales à la section droite, telles que

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{M_z(x)}{I_{Gz}(x)} y$$

La matrice des contraintes s'écrit:



$$_G[\sigma_{ij}]_{(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \ll \sigma_{xx} & 0 \\ \sigma_{yx} \ll \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 LA FLEXION SIMPLE

40

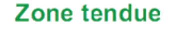
4.4.3 Dimensionnement

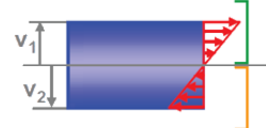
Le dimensionnement en flexion simple, est identique à celui de la flexion pure.

En effet, les contraintes de cisaillement induites par l'effort tranchant étant négligeables par rapport à celles de traction dues au moment de flexion, nous avons donc :

❑ **Cas des matériaux symétriques:**

$$\frac{|M_z|}{I_{Gz}} v \leq \sigma_u \quad \text{avec } v = \sup(V_1, V_2)$$





❑ **Cas des matériaux non symétriques**

- Dans la zone tendue:

$$|\sigma_{xx}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} V_1 \leq \sigma_u$$

- Dans la zone comprimée:

$$|\sigma_{xx}| = \frac{|M_z|}{I_{Gz}} V_2 \leq \sigma'_u$$

❑ **Concentration de contraintes**

En cas de **variation brutale** de section , la contrainte nominale est multipliée par un coefficient de concentration de contraintes K_t qui depend de " l'accident de forme "

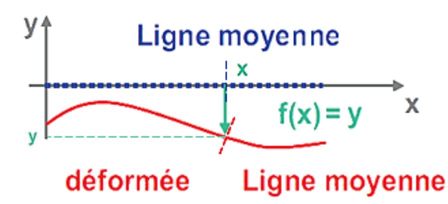
4.4 LA FLEXION SIMPLE

4.4.4 Les déplacements en flexion simple

41

❑ **Déplacements en flexion simple**

Une poutre droite, soumise à de la flexion simple fléchit. Sa déformée est caractérisée par la flèche que prend la ligne moyenne (effet du moment fléchissant $M_z(x)$) et par le gauchissement de la section (considéré nul dans le cadre des hypothèses). (effet de l'effort tranchant T_y).





4.4 LA FLEXION SIMPLE

4.4.5 Équation de la déformée

42

❑ **Equation différentielle de la ligne moyenne fléchie - Equation de la "déformée"**

Rayon de courbure d'une courbe plane

Soit une courbe plane continue, dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$, d'équation :

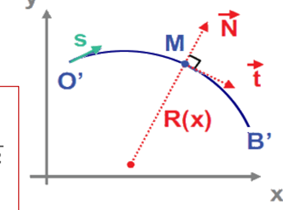
$$y = f(x)$$

- ***Propriété 3 (rayon de courbure)***

On notera s l'abscisse curviligne le long de la poutre orientée de O' vers B', et R(x) le rayon de courbure au point d'abscisse x.

Le **rayon de courbure R(x)** en un point donné de la courbe définie par $y = f(x)$ se déduit par la relation* :

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{f''(x)}{\left[1 + \left(f'(x)\right)^2\right]^{3/2}}$$





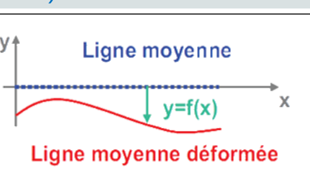
Démo: https://www.intmath.com/applications-differentiation/8-radius-curvature.php

4.4 LA FLEXION SIMPLE

4.4.5 Équation de la déformée (cas d'une poutre droite)

43

❑ **Ligne moyenne déformée d'une poutre droite**



Dans le cas d'une poutre droite:

Propriété 4 **(Equation de la ligne moyenne déformée)**

Dans le cas de la flexion simple : $\mathrm{R(x)} = -\dfrac{EI_{Gz}(x)}{M_z(x)}$

(cf. diapo. 33)
I_{Gz} Moment quadratique d'inertie de la section S par rapport à l'axe principal z

La ligne moyenne déformée est une courbe plane d'équation $\mathrm{y = f(x)}$ continue

avec : $\dfrac{1}{\mathrm{R(x)}} = \dfrac{\mathrm{f''(x)}}{\left[1 + \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2\right]^{3/2}} = -\dfrac{M_z(x)}{EI_{Gz}(x)}$

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{f''(x)}}{\left[1 + \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2\right]^{3/2}} = -\dfrac{M_z(x)}{EI_{Gz}(x)}}$$

- $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$
- $f'(x)$ est du même ordre de grandeur que ε_{xy}

En effet $\varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

y
Ligne moyenne
x
y=f(x)
dx
dy
f'(x)



4.4 LA FLEXION SIMPLE

4.4.5 Équation de la déformée (cas d'une poutre droite)

44

Dans le domaine élastique des petites déformations, les termes d'ordre 2 sont négligés :

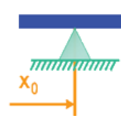
${\varepsilon_{ij}}^2 \approx 0$ donc $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)^2 \approx 0$

d'où l'équation différentielle de la ligne moyenne déformée $\mathrm{f''(x)} = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx -\dfrac{M_z(x)}{EI_{Gz}(x)}$

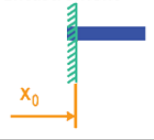
Conclusion : $\boxed{\mathrm{f''(x)} = -\dfrac{M_z(x)}{EI_{Gz}(x)}}$

Par intégrations successives, cette équation permet de déterminer l'équation de la **ligne moyenne déformée $f(x)$**. Elle introduit des constantes d'intégration, que l'on peut déterminer à partir des conditions aux limites du problème.

D'une manière générale, on utilise les conditions cinématiques associées aux divers appuis (liaisons) de la poutre étudiée :









4.4 LA FLEXION SIMPLE

45

4.4.5 Équation de la déformée (conditions aux limites)

Le moment fléchissant $M_3(x)$ est une fonction qui s'exprime par tronçon. Chaque liaison exerce une action passive sur la poutre, elle introduit une discontinuité de $M_3(x)$ et donc délimite un tronçon.

La double intégration de l'équation différentielle $f''(x) = -\frac{M_z(x)}{EI_{Gz}(x)}$ introduit alors deux constantes au niveau de chaque discontinuité de M_3. Pour déterminer la valeur de ces constantes, on écrira la valeur que prend f(x) au niveau du point de liaison et la continuité de sa dérivée en ce même point.

- **Appui simple ou liaison pivot** : (ex: en $x = X_0$)
  - le déplacement selon $(O, \vec{y})$ est imposé (en général nul) : $f(x = X_0) = 0$
  - il y a continuité de $\frac{df(x=X_0)}{dx}$ qui représente **l'angle de rotation** de la section droite par rapport à son orientation initiale : $f'\begin{pmatrix} x \to X_0 \\ x < X_0 \end{pmatrix} = f'\begin{pmatrix} x \to X_0 \\ x > X_0 \end{pmatrix}$
- **Encastrement :** peut toujours représenter une extrémité de poutre ($x = 0$ ou $x = L$)
  - le déplacement selon $(O, \vec{y})$ est imposé (en général nul) : $f(x = X_0) = 0$
  - $\frac{df(x=X_0)}{dx}$ est imposée (en général nulle) : $f'(x = 0) = 0$ et/ou $f'(x = L) = 0$



4.4 LA FLEXION SIMPLE

46

4.4.5 Équation de la déformée (conditions aux limites)

Cas d'un problème hyperstatique

Lorsque le problème est hyperstatique les étapes précédentes ne sont pas suffisantes pour résoudre complètement l'équation de la ligne moyenne déformée, des inconnues subsistent.

En effet $M_z(x)$ n'a pas pu être déterminé lors de la résolution du PFS, le nombre d'inconnues statiques étant supérieur à 3 (cas des problèmes plans).

A ce stade de résolution, des conditions limites supplémentaires : valeurs de déplacements $f(x = X_i)$ ou de rotations $f'(x = X_i)$ imposées mais non encore utilisées pourront permettre de résoudre l'équation de la ligne moyenne déformée.

Il s'agira ici d'identifier ces valeurs de déplacements $f(x = X_i)$ et/ou de rotations $f'(x = X_i)$ imposées pour finaliser la résolution de l'équation de la ligne moyenne déformée.

En général ces conditions limites supplémentaires sont identifiées au niveau des appuis



4.4 LA FLEXION SIMPLE

47

4.4.6 A RETENIR

Torseur des éléments de réduction

$$_G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\}_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}_G \qquad _G\{\mathcal{T}_{Fext/g}\}_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_y(x) \\ T_z(x) & 0 \end{Bmatrix}_G$$

$$\frac{\boldsymbol{dM_z(X)}}{\boldsymbol{dX}} = -\boldsymbol{T_y(X)} \qquad \frac{\boldsymbol{dM_y(X)}}{\boldsymbol{dX}} = \boldsymbol{T_z(X)}$$

Etat de contrainte $v_1 \leq y \leq v_2$

$$[\sigma(y)]_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bilan Loi de Hooke uniaxiale ⟹

$$\begin{cases} \sigma_{11}(y) = \dfrac{M_z(x)}{I_{Gz}} \cdot y \\ \varepsilon_{11}(y) = \dfrac{M_z(x)}{E \cdot I_{Gz}} \cdot y \\ \sigma_{11}(y) = E \cdot \varepsilon_{11}(y) \end{cases}$$

I_{Gz}: moment quadratique

Etat de déformation

$$[\varepsilon(y)]_{(\vec{x_G},\vec{y_G},\vec{z_G})} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(y) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(y) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(y) \end{bmatrix}$$

Equation de la déformée

$$E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -M_z(x)$$

Critères de dimensionnement

- **Critère en contrainte** $\sigma_{max} < \sigma_u = \dfrac{R_e}{s}$ $\quad s > 1{,}5$

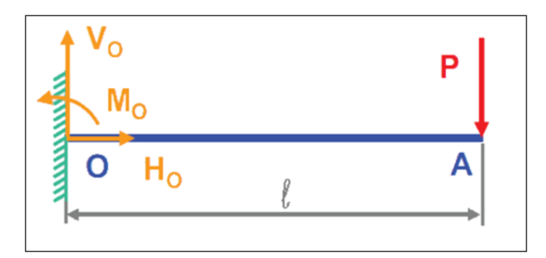
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

4.5.1 Application : poutre encastrée à l'une de ses extrémités

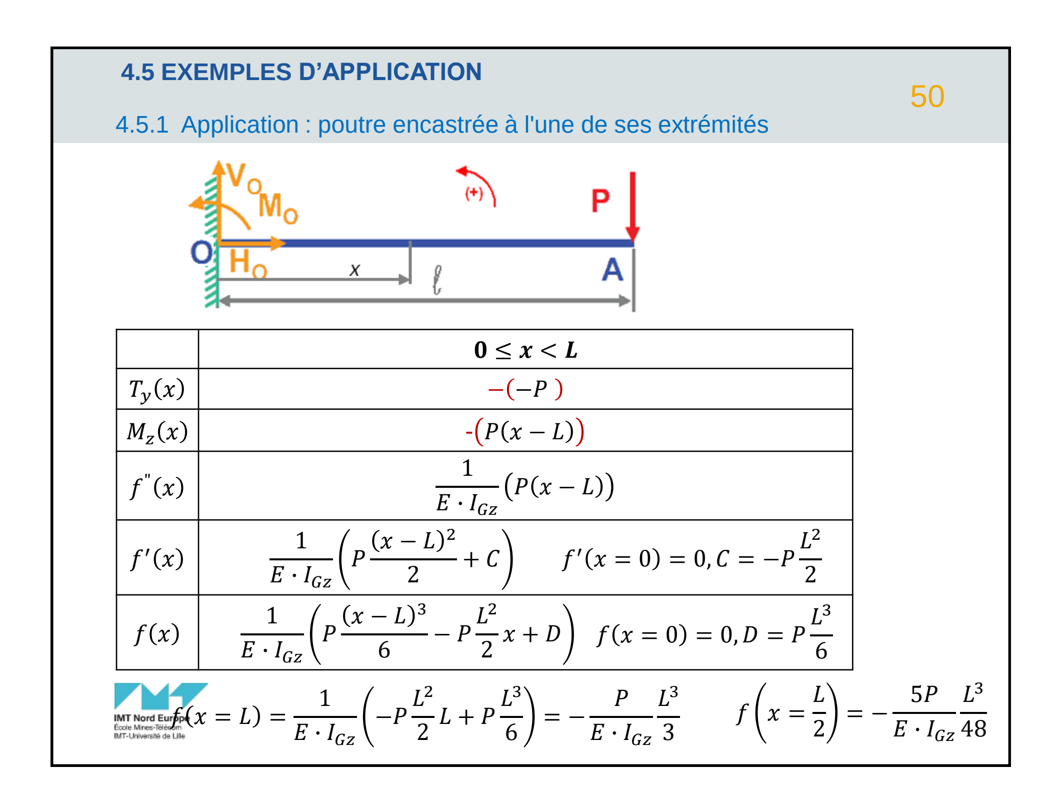
- **Exemple 1 :** Soit une poutre droite d'inertie constante, de longueur L, encastrée à l'extrémité x=0, libre à l'autre extrémité A, supportant une charge ponctuelle P en A . Déterminer la flèche en $x = l$ et $x = l/2$.





4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

4.5.1 Application : poutre encastrée à l'une de ses extrémités



	$0 \le x < L$
$T_y(x)$	$-(-P)$
$M_z(x)$	$-(P(x-L))$
$f''(x)$	$\frac{1}{E \cdot I_{Gz}}(P(x-L))$
$f'(x)$	$\frac{1}{E \cdot I_{Gz}}\left(P\frac{(x-L)^2}{2}+C\right)$ $\quad f'(x=0)=0, C=-P\frac{L^2}{2}$
$f(x)$	$\frac{1}{E \cdot I_{Gz}}\left(P\frac{(x-L)^3}{6}-P\frac{L^2}{2}x+D\right)$ $\quad f(x=0)=0, D=P\frac{L^3}{6}$

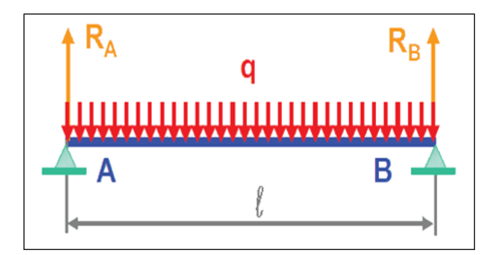
$$f(x=L)=\frac{1}{E \cdot I_{Gz}}\left(-P\frac{L^2}{2}L+P\frac{L^3}{6}\right)=-\frac{P}{E \cdot I_{Gz}}\frac{L^3}{3} \qquad f\left(x=\frac{L}{2}\right)=-\frac{5P}{E \cdot I_{Gz}}\frac{L^3}{48}$$

4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

4.5.2 Application : poutre sur deux appuis simples

51

- **Exemple 2 :** Soit une poutre droite d'inertie constante, de longueur l, sur deux appuis simples en A et B, supportant une charge répartie de densité q sur toute sa longueur. Déterminer la valeur de la flèche maximale.

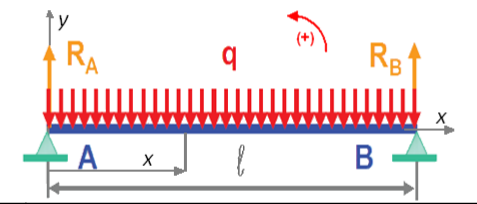




4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

4.5.2 Application : poutre sur deux appuis simples

52



$$R_A = R_A = \frac{q \cdot l}{2}$$

	$0 \leq x < L$
$T_y(x)$	$q \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$
$M_z(x)$	$q \cdot \left(-\frac{lx}{2} + \frac{x^2}{2}\right)$ $\quad f''(x) = \frac{-M_z(x)}{E \cdot I_{Gz}}$
$f'(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} + C\right)$ $\quad f'\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0 \quad C = -\frac{L^3}{24}$
$f(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3}{24}x + D\right)$ $\quad f(x = 0) = 0 \quad D = 0$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

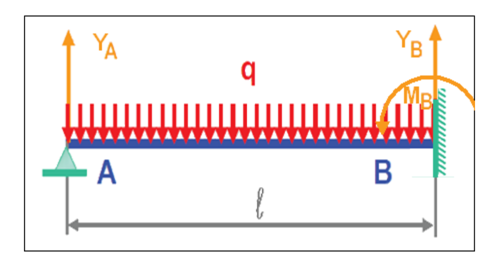
$$fmaxi = f\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{L^3}{24}x\right) = \frac{-q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{5L^4}{384}\right)$$

4.5 EXEMPLES D’APPLICATION

4.5.3 Application : poutre sur appui simple et encastrée (hyperstatique)

53

- **Exemple 3 :** Soit une poutre droite d’inertie constante, de longueur l, sur un appui simple en A et encastrée en B, supportant une charge répartie de densité q sur toute sa longueur.
  - Déterminer l'équation de la ligne moyenne déformée.
  - On pourra en déduire la valeur de la flèche maximale.

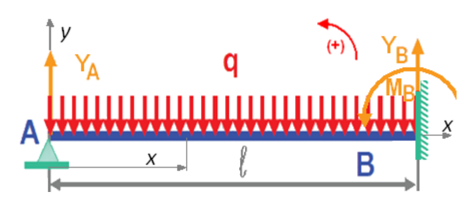




4.5 EXEMPLES D’APPLICATION

4.5.3 Application : poutre sur appui simple et encastrée (hyperstatique)

54



$$Y_A - q \cdot l + Y_B = 0$$

$$-Y_A \cdot L + q \cdot \frac{l^2}{2} + M_B = 0$$

	$0 \leq x < L$		
$T_y(x)$	$Y_A - q \cdot x$		
$M_z(x)$	$-Y_A \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2}$	$f''(x) = \frac{-M_z(x)}{E \cdot I_{Gz}}$	
$f'(x)$	$\frac{1}{E \cdot I_{Gz}}\left(Y_A \cdot \frac{x^2}{2} - q\frac{x^3}{6} + C\right)$	$f'(x = L) = 0$	$C = -Y_A \cdot \frac{L^2}{2} + q\frac{L^3}{6}$
$f(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(Y_A \cdot \frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24} + Cx + D\right)$	$f(x = 0) = 0$	$D = 0$

$$f(x = L) = 0 \Rightarrow \quad Y_A \cdot \frac{L^3}{6} - q\frac{L^4}{24} + \left(-Y_A \cdot \frac{L^2}{2} + q\frac{L^3}{6}\right)L = 0$$

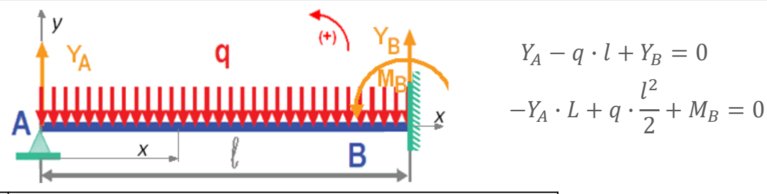
$$Y_A \cdot \frac{1}{6} - q\frac{L}{24} - Y_A \cdot \frac{1}{2} + q\frac{L}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{Y_A}{3} + q\frac{L}{8} = 0 \quad \Rightarrow Y_A = \frac{3qL}{8}$$

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

55

4.5.3 Application : poutre sur appui simple et encastrée (hyperstatique)



$$Y_A - q \cdot l + Y_B = 0$$

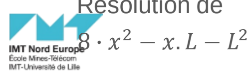
$$-Y_A \cdot L + q \cdot \frac{l^2}{2} + M_B = 0$$

	$\mathbf{0 \le x < L}$
$f'(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3L}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{48}\right)$
$f(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3L}{8} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{5L^3}{48}x\right)$

la flèche maximale lorsque $f'(x)$=0 : $\frac{3L}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{48} = 0$

$x = L$ Est racine de cette équation

$$\Longrightarrow -\frac{-9L \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + L^3}{48} = 0 = (x - L)(8 \cdot x^2 - x.L - L^2)$$



Résolution de $8 \cdot x^2 - x.L - L^2 = 0$ $\quad \Delta = 33L^2$

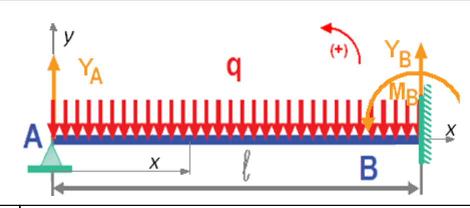
Seule la racine positive est utilisable

$$x_{fmax} = \frac{1 + \sqrt{33}}{16} L = 0{,}4215\, L$$

4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

56

4.5.3 Application : poutre sur appui simple et encastrée (hyperstatique)



$$Y_A - q \cdot l + Y_B = 0$$

$$-Y_A \cdot L + q \cdot \frac{l^2}{2} + M_B = 0$$

	$\mathbf{0 \le x < L}$
$f'(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3L}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5L^3}{48}\right)$
$f(x)$	$\frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3L}{8} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{5L^3}{48}x\right)$

la flèche maximale est donc $f(x = 0{,}4215\, L) = \frac{q}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3L}{8} \cdot \frac{(0{,}4215\, L)^3}{6} - \frac{(0{,}4215\, L)^4}{24} - \frac{5L^3}{48} 0{,}4215\, L\right)$

$$f(x = 0{,}4215\, L) = \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I_{Gz}}\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{0{,}4215^3}{6} - \frac{0{,}4215^4}{24} - \frac{5 \cdot 0{,}4215}{48}\right) = -0{,}04054 \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I_{Gz}}$$



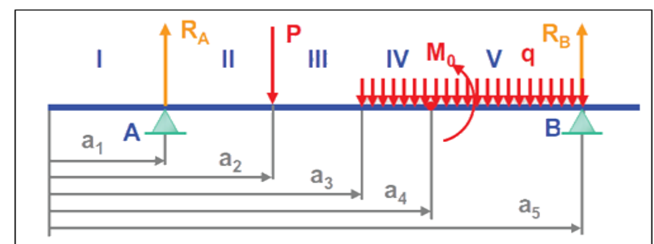
$$f_{max}(x = 0{,}4215\, L) = -0{,}04054 \frac{q \cdot L^4}{E \cdot I_{Gz}}$$

4.5 EXEMPLES D'APPLICATION

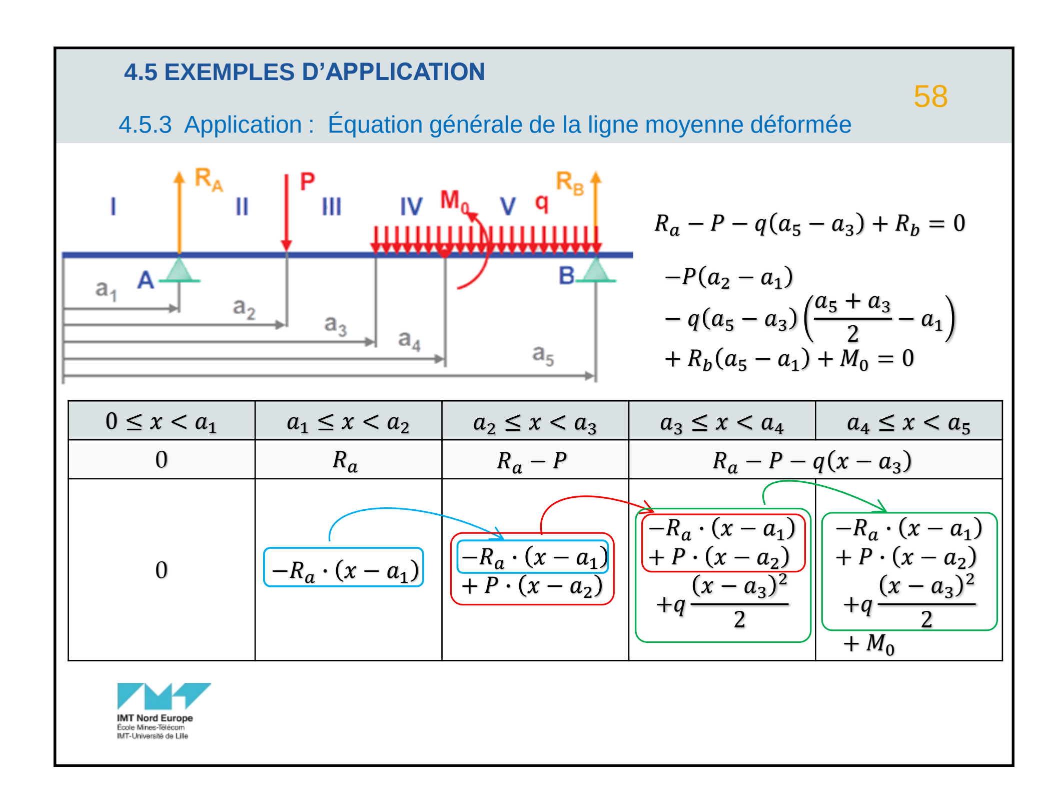
4.5.3 Application : Équation générale de la ligne moyenne déformée

57

- **Exemple 3:** Soit une poutre droite reposant sur deux appuis simples de même niveau et supportant un nombre n de charges quelconques. Cette poutre peut être divisée en (n+1) tronçons, correspondant chacun à une expression particulière de l'effort tranchant $T(x)$ et du moment fléchissant $M(x)$ et donc de la dérivée seconde de la déformée $f''(x)$.
- Établir pour chaque tronçon l'expression des éléments de réduction.
- Déterminer l'équation de la ligne moyenne déformée.





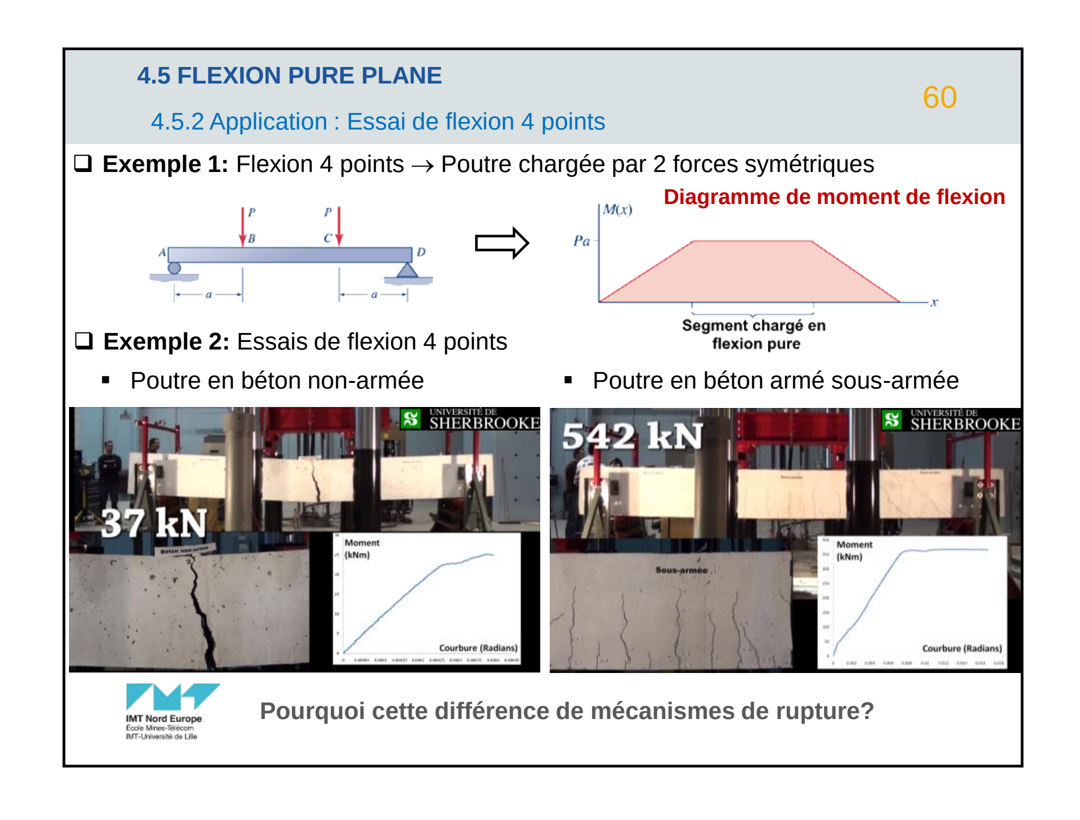


$$R_a - P - q(a_5 - a_3) + R_b = 0$$

$$-P(a_2 - a_1)$$
$$- q(a_5 - a_3)\left(\frac{a_5 + a_3}{2} - a_1\right)$$
$$+ R_b(a_5 - a_1) + M_0 = 0$$

$0 \le x < a_1$	$a_1 \le x < a_2$	$a_2 \le x < a_3$	$a_3 \le x < a_4$	$a_4 \le x < a_5$
0	R_a	$R_a - P$	$R_a - P - q(x - a_3)$	
0	$-R_a \cdot (x - a_1)$	$-R_a \cdot (x - a_1)$ $+ P \cdot (x - a_2)$	$-R_a \cdot (x - a_1)$ $+ P \cdot (x - a_2)$ $+q\frac{(x - a_3)^2}{2}$	$-R_a \cdot (x - a_1)$ $+ P \cdot (x - a_2)$ $+q\frac{(x - a_3)^2}{2}$ $+ M_0$


PARTIE 3
4 LA FLEXION
4.1 FLEXION: CARACTÉRISATION
4.2 LA FLEXION PURE
4.3 FLEXION PURE PLANE
4.4 LA FLEXION SIMPLE
4.5 EXEMPLES D'APPLICATION
1. exemples
2. Essai flexion 4 points
4.6 LA FLEXION PURE PLANE (complément)
4.8 LA FLEXION DÉVIÉE (hors programme)
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

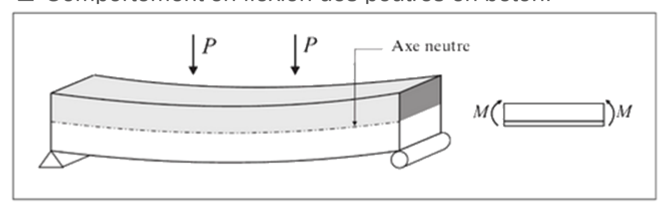

4.5 FLEXION PURE PLANE
4.5.2 Application : Essai de flexion 4 points
60
❑ Exemple 1: Flexion 4 points → Poutre chargée par 2 forces symétriques
Diagramme de moment de flexion
P
P
A
B
C
D
a
a
M(x)
Pa
x
Segment chargé en flexion pure
❑ Exemple 2: Essais de flexion 4 points
▪ Poutre en béton non-armée
▪ Poutre en béton armé sous-armée
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
37 kN
Moment (kNm)
Courbure (Radians)
542 kN
Sous-armée
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille
Pourquoi cette différence de mécanismes de rupture?

4.5 FLEXION PURE PLANE

61

4.5.2 Application : Essai de flexion 4 points Remarques concernant l'exemple 2

❑ Comportement en flexion des poutres en béton:



Structures en Béton Armé (source: Revu et Corrigé D.O. Chaalla)

Une poutre en flexion, peut être imaginée en deux parties de part et d'autre de l'axe neutre :

- **Une Partie comprimée** (située au dessus de l'axe neutre): Dans cette zone la déformation est reprise par le béton (matrice).
- **Une Partie tendue** (située au dessous de l'axe neutre): le béton ayant une faible résistance à la traction, le transfert des contraintes de traction est assuré par les armatures (le renfort) .

→ Le transfert de charges dépend de l'adhérence entre le béton et les armatures

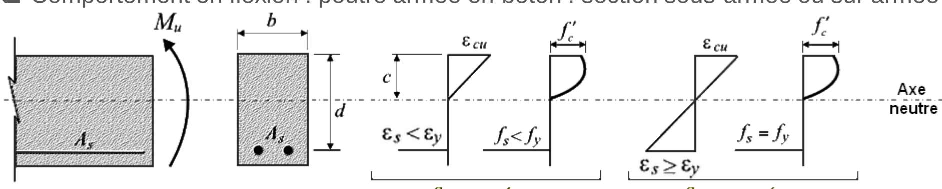
IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.5 FLEXION PURE PLANE

62

4.5.2 Application : Essai de flexion 4 points Remarques concernant l'exemple 2

❑ Comportement en flexion : poutre armée en béton : section sous-armée ou sur armée



Le comportement de l'armature (renfort) lors de la rupture de la poutre permet de classer la poutre:

- **Etat élastique :** Section dite **sur-armée**: la ruine de la poutre est due à la rupture en compression du béton situé au-dessus de l'axe neutre alors que l'armature métallique reste en comportement élastique . La rupture de la poutre présente dans ce cas un caractère fragile (brutal) **(à éviter)**
- **Etat plastique :** Section dite **sous-armée**: l'armature métallique ductile est soumise à une contrainte de traction dans la zone plastique de son comportement, avant que le béton ait atteint sa contrainte de rupture en compression. Une section sous-armée présente un mode de rupture plus sécuritaire car, en profitant du comportement ductile des armatures en acier, elle permet d'éviter une rupture fragile. **(à privilégier)**

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille

4.5 FLEXION PURE PLANE

4.5.10 Flexion pure plane : application directe

63

❑ **Exemple: Flexion quatre points**

Soit une poutre section droite est rectangulaire (hauteur h, largeur b=3 h).

et le chargement définis sur la figure.

- Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants, ainsi que la contrainte normale maximale, le rayon de courbure de la fibre moyenne et la flèche au centre de la poutre
- Application numérique :

l=400mm
a=100mm
E=200000MPa
P=300 N
σ_u=160 MPa

P P A B a a ℓ

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille



4.6 FLEXION PURE PLANE (complément)

4.6.1 Flexion pure plane : Rendement géométrique

65

- Soit une poutre sollicitée en flexion pure plane ($M_y = 0;\ M_z \neq 0$)
- Le **dimensionnement** en flexion **le plus économique** est tel que les contraintes maximales de traction et de compression sont toutes les deux exactement égales aux contraintes limites d'utilisation en traction et en compression.

  Il est tel que:

$$\begin{cases} \dfrac{|M_z|}{I_{Gz}} v_1 \leq \sigma_u \\ \dfrac{|M_z|}{I_{Gz}} v_2 \leq \sigma'_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{I_{Gz}}{v_1} \geq \dfrac{|M_Z|}{\sigma_u} \\ \dfrac{I_{Gz}}{v_2} \geq \dfrac{|M_Z|}{\sigma'_u} \end{cases}$$

- Les quantités $\dfrac{I_{Gz}}{v_1}$ et $\dfrac{I_{Gz}}{v_2}$ sont appelées **modules d'inertie** ou **modules de résistance** de la section droite.



4.6 FLEXION PURE PLANE (complément)

4.6.2 Flexion pure plane : Rendement géométrique / Poutre idéale

66

- Dans une **poutre idéale**, c.à.d. de rendement optimal, toutes les fibres subissent les contraintes limites.
- En se rappelant de la distribution des contraintes en **flexion pure plane,** toutes les fibres doivent être des fibres extrêmes (proches du contour de la poutre).

Zone tendue

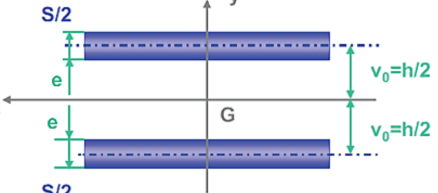
v_1

v_2

Zone comprimée

- Dans le cas d'un matériau **d'un matériau symétrique** ($\sigma_e = |\sigma'_e|$), la section d'une telle poutre devrait être constituée de **deux membranes identiques de même épaisseur**.
- Le module d'inertie par rapport à l'axe (G; $\vec{z}$) de cette poutre idéale est donné par:

$$\frac{I_{Gz}}{v_0} = \frac{(S.h^2/4)}{h/2} = \frac{S.h}{2}$$



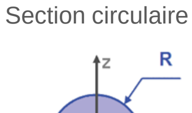


4.6 FLEXION PURE PLANE (complément)

4.6.2 Flexion pure plane : Rendement géométrique / Poutre idéale

67

- Soit une poutre sollicitée par un chargement en flexion pure $(M_y = 0;\ M_z \neq 0)$
- Le **rendement géométrique ρ** est égal au rapport du module d'inertie $I/_v$ sur le module d'inertie de la poutre idéale $\frac{S.h}{2}$

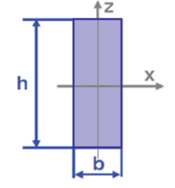


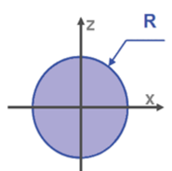
$$\rho = \frac{I/_v}{S.h/_2} = \frac{I}{v} \times \frac{2}{S.h}$$

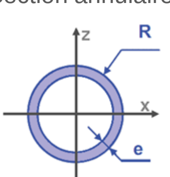
❑ **Applications directes:**

Déterminer le rendement géométrique des sections suivantes:

- 1er cas: Section rectangulaire
- 2ème cas: Section circulaire
- 3ème cas: Section annulaire









PARTIE 3

Fin Partie 3

IMT Nord Europe
École Mines-Télécom
IMT-Université de Lille